Grażyna Rygał, Arkadiusz Bryll

Zadania z błyskiem

Rozwiązywanie zadań matematycznych metodami geometrycznymi i algebraicznymi

OPOLE
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
2015

REDAKCJA
Wydawnictwo NOWIK

SKŁAD KOMPUTEROWY I RYSUNKI
Barbara Kwaśnicka

PROJEKT OKŁADKI
Tomasz Fronckiewicz

ISBN: 978-83-62687-79-4

Wydanie pierwsze, Opole 2015

© Copyright by Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
Wydawnictwo Nowik Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Wszelkie prawa zastrzeżone. Rozpowszechnianie bez zgody Wydawcy całości publikacji lub jej fragmentów w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Kopiowanie metodą kserograficzną, fotograficzną, umieszczanie na nośnikach magnetycznych i optycznych i innych narusza prawa autorskie niniejszej publikacji.

Kserowanie zabija książki!

Szanowny Czytelniku, jeśli chcesz wyrazić swoją opinię na temat tej publikacji, prosimy o kontakt mailowy matma@nowik.com.pl lub wypełnienie formularza na naszej stronie www.nowik.com.pl

Wydrukowane w Polsce

Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na www.nowik.com.pl

Dystrybucja:
Wydawnictwo NOWIK Sp.j. Biuro Handlowe:
45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104
Tel./fax 77 454 36 04
http://www.nowik.com.pl e-mail: biuro@nowik.com.pl

Spis treści

Od autorów

Wiedza matematyczna, jaką przekazujemy uczniom jest elementem niezbędnym w wykonywaniu wielu zawodów. Rozwiązywanie zadań przygotowuje uczniów do przyszłego prawidłowego i samodzielnego rozwikłania wielu problemów. Kształtowanie intuicji geometrycznych podczas rozwiązywania zadań metodami geometryzacji pozwala uczniom poznać ciekawe i szybkie metody dojścia do wyniku. Każde zadanie ma swoją logiczną konstrukcję i zrozumienie jej, pomoże w szybkim i poprawnym rozwiązaniu.

Istnieją dwie główne drogi przyswajania przez uczniów wiedzy matematycznej – droga algebraiczna i droga geometryczna. Intuicje algebraiczne u uczniów szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych są mniej rozwinięte aniżeli intuicje geometryczne. Naturalnym jest przejście od pojęć o charakterze poglądowym do pojęć o charakterze abstrakcyjnym. Ważne jest oczywiście, kiedy można rezygnować z upoglądowienia matematyki i przejść na drogę abstrakcji. Na poziomie nauczania średniego upoglądowienie matematyki jest jednak konieczne. Wiele zadań matematycznych sprawia duży kłopot, gdy rozwiązuje się je na drodze czysto algebraicznej i kłopot ten zmniejsza się lub znika, gdy wybiera się drogę geometryczną.

Autorzy proponują wciąż mało popularne, geometryczne metody rozwiązywania zadań. Niektóre przykłady rozwiązano różnymi metodami, aby przekonać i zachęcić do poszukiwań najprostszych rozwiązań.

Opracowanie zawiera również szereg zadań nietypowych. Materiał może być wykorzystany bezpośrednio w pracy lekcyjnej, w pracy z uczniami o uzdolnieniach matematycznych, w kołach matematycznych oraz w przygotowaniach do konkursów i olimpiad matematycznych. Jest to też doskonały materiał do rozwijania zainteresowań uczniów naukami matematycznymi.

Dedykujemy tę pozycję nauczycielom matematyki szkół ponadgimnazjalnych przygotowujących uczniów do matury z matematyki, ale też nauczycielom szkół gimnazjalnych prowadzących zajęcia z uczniami uzdolnionymi matematycznie.

Rozdział 1

Zadania z błyskiem

W rozdziale tym podajemy zadania, które wymagają raczej błyskotliwości i spostrzegawczości, aniżeli skomplikowanych rozumowań czy obliczeń.

Zadania

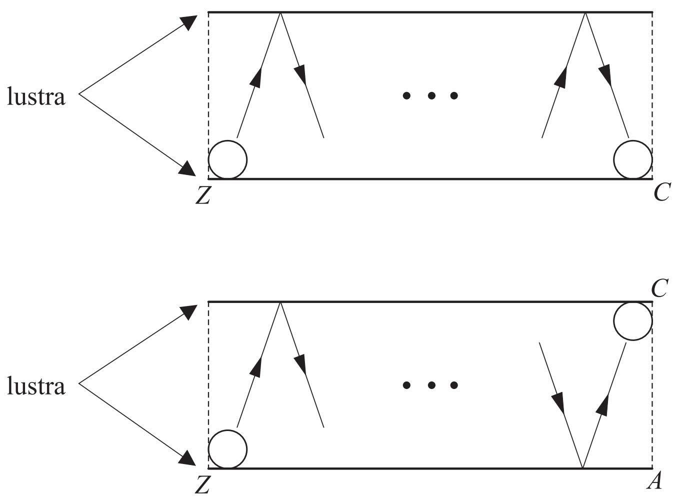
1.1. Jak należy skierować piłeczkę umieszczoną na obwodzie stołu w kształcie okręgu, aby po n odbiciach od bandy powróciła do punktu wyjściowego?

1.2. Bilę bilardową znajdującą się na środku stołu bilardowego należy skierować do łuzy w ten sposób, aby odbiła się ona jeden raz, dwa razy, trzy razy, cztery razy od bandy stołu. [20]

1.3. Skierować promień świetlny ze źródła Z w ten sposób, aby po n odbiciach od luster ustawionych równolegle trafił do celu C (rys. 1.1. a, b).

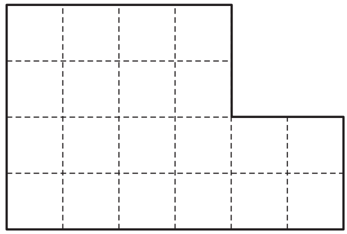
a) $n = 2k + 1$

b) $n = 2k$



Rys. 1.1. a, b

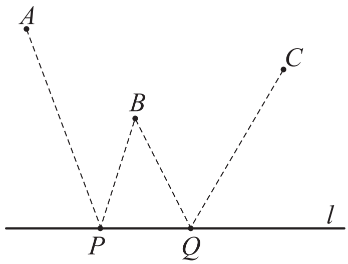
1.4. Figurę podaną na rysunku 1.2 należy podzielić na dwie części o równych polach za pomocą jednej prostej, która przecina obwód tej figury w dwu węzłach siatki podziału tej figury na kwadraty. Podać 6 sposobów takiego podziału. [22]



Rys. 1.2

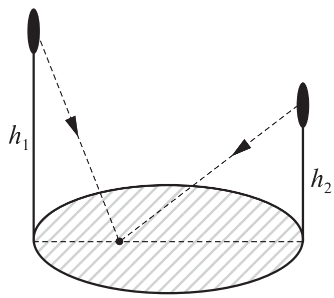
1.5. Czy można pokryć 31 płytkami domina pola szachownicy w ten sposób, aby dwa narożne pola leżące na przekątnej szachownicy były niepokryte? Jedna płytka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

1.6. Znaleźć na prostej l takie punkty P, Q, aby łamana $APBQC$ była najkrótsza (rys. 1.3).



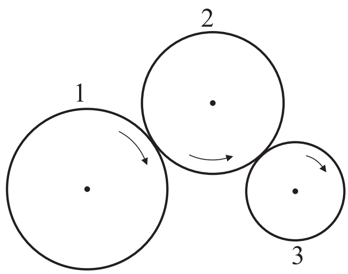
Rys. 1.3

1.7. Z wierzchołków dwóch drzew o wysokościach h_1 i h_2 metrów ($h_1 > h_2$) wylatują równocześnie z tą samą prędkością i najkrótszą drogą dwa ptaki, aby w tym samym miejscu jeziora równocześnie napić się wody. Wskazać to miejsce (rys. 1.4).



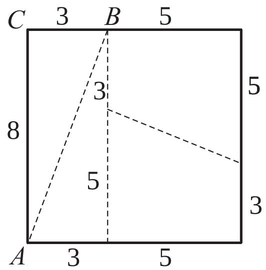
Rys. 1.4

1.8. Na płaszczyźnie rozmieszczonych jest 11 kół zębatych w ten sposób, że pierwsze koło połączone jest zębami z drugim kołem, drugie – z trzecim itd. Ostatnie, jedenaste koło, połączone jest z pierwszym. Czy taki układ może obracać się? (rys. 1.5). [3]

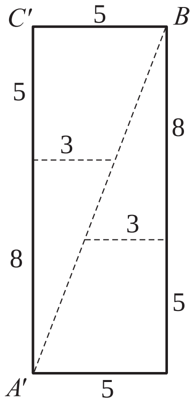


Rys. 1.5

1.9. Kwadrat o boku 8 cm rozcięto w sposób podany na rysunku 1.6 i z powstałych części utworzono prostokąt podany na rysunku 1.7. Okazało się, że pole kwadratu jest równe 64 cm^2 $(8 \cdot 8 = 64)$, a pole prostokąta jest równe 65 cm^2 $(13 \cdot 5 = 65)$. Gdzie tkwi błąd? [7, 8, 18]



Rys. 1.6



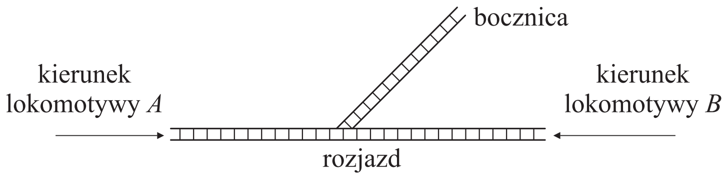
Rys. 1.7

1.10. Dwie lokomotywy *A* i *B* ciągnące po 80 wagonów spotkały się na tym samym torze przed bocznicą kolejową (rys. 1.8).

1. Jakie manewry należało wykonać, aby lokomotywy mogły kontynuować swój kurs, jeżeli bocznica może pomieścić tylko 40 wagonów i lokomotywę? [8].

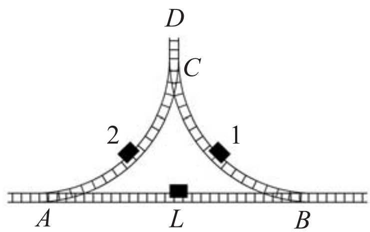
2. Czy możliwe jest kontynuowanie kursu przez lokomotywy *A* i *B*, jeżeli bocznica może pomieścić tylko 20 wagonów i lokomotywę?

3. Czy możliwe jest kontynuowanie kursu przez lokomotywy *A* i *B*, jeżeli ciągną one po *k* wagonów, a bocznica może pomieścić *l* wagonów $(l < k)$ i lokomotywę?



Rys. 1.8

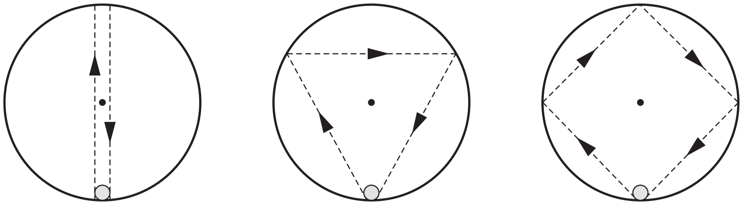
1.11. System kolejowy składa się z linii głównej *AB* i dwóch zbiegających się bocznic *AC* i *BC* (rys. 1.9). Na bocznicach stoją wagony o numerach 1 i 2, zaś na torze głównym znajduje się lokomotywa *L*. Jakie manewry musi wykonać lokomotywa, aby wagony zamienić miejscami i powrócić na miejsce wyjściowe, jeżeli na odcinku *CD* (tj. odcinku wspólnym dwu bocznic) może zmieścić się tylko jeden wagon lub tylko lokomotywa? [8]



Rys. 1.9

Rozwiązania

1.1. W przypadku $n = 1$ piłeczkę należy skierować wzdłuż średnicy okręgu. Jeżeli $n \geq 2$, to piłeczkę należy skierować w ten sposób, aby poruszała się po obwodzie wielokąta foremnego o $n + 1$ bokach, wpisanego w dany okrąg (rys. 1.10)[1].



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

Rys. 1.10

[1] Możliwość konstrukcji wielokąta foremnego środkami klasycznymi (tj. przy użyciu cyrkla i linijki) wyjaśnia następujące kryterium sformułowane przez K. Gaussa w roku 1801 (zob. [13]):
Warunkiem koniecznym i wystarczającym konstruowalności środkami klasycznymi n-kąta foremnego (na podstawie danego jego boku lub promienia okręgu na nim opisanego) jest to, aby liczba n spełniała jeden z następujących warunków:

1° n jest liczbą pierwszą postaci $2^{2^k} + 1$ (tj. liczbą pierwszą Fermata), gdzie k jest liczbą naturalną ($k = 0, 1, 2, \ldots$);

2° $n = 2^m \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_l$, gdzie $m \in \boldsymbol{N}$, zaś $n_1, n_2, \ldots, n_l$ są liczbami pierwszymi Fermata, różnymi, gdy $l \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$;

3° $n = 2^r$, gdzie $r \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$.

W przypadku 1° liczbami pierwszymi Fermata są liczby $n = 3, 5, 17, 257, 65537$ otrzymane ze wzoru $n = 2^{2^k} + 1$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dla $k = 5$ otrzymujemy liczbę złożoną 4294967296 (podzielną przez 641). Nie wiadomo, czy istnieją liczby pierwsze Fermata dla $k > 5$.

W przypadku 2° dają się konstruować wielokąty, których liczba boków wyraża się za pomocą iloczynu $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_l$ różnych liczb pierwszych Fermata pomnożonego przez 2^m ($m \in \boldsymbol{N}$), gdy $l > 1$. Jeśli $l = 1$, to $n = 2^m \cdot n_1$, gdzie n_1 jest liczbą pierwszą Fermata i $m \in \boldsymbol{N}$. Mając do dyspozycji tylko pięć liczb Fermata, możemy więc skonstruować między innymi wielokąty foremne,
gdy $n = 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 17,\ \ldots,\ 5 \cdot 15,\ 5 \cdot 257,\ 257 \cdot 65537,\ 3 \cdot 5 \cdot 17,\ \ldots$ oraz wielokąty foremne powstające z nich przez podwajanie liczby boków.
Nie jest konstruowalny wielokąt foremny, gdy $n = 9 = 3 \cdot 3$, bowiem liczba 9 jest iloczynem dwóch liczb pierwszych Fermata, ale liczby te nie są różne.
W przypadku $n = 2^r$, $r \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$ otrzymujemy kolejno kwadrat, ośmiokąt, szesnastokąt itd.
Dla liczb naturalnych nie wymienionych w podanym wyżej kryterium możliwe są jedynie konstrukcje przybliżone wielokątów foremnych.
Dotyczy to np. wielokątów foremnych, gdy $n = 7, 9, 11, 13, 14$.