Jan Kowolik, Tomasz Szwed

Matematyka dla odważnych

Zbiór zadań konkursowych dla uczniów uzdolnionych matematycznie

Szkoła ponadgimnazjalna i nie tylko

Opole 2010

Spis treści

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest przeznaczony przede wszystkim do pracy na kołach matematycznych dla uczniów szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych o uzdolnieniach matematycznych.

Opracowanie to pozwala uczniom zapoznać się z różnymi rodzajami oraz stopniem trudności zadań matematycznych występujących w konkursach matematycznych oraz w rejonowych etapach olimpiad matematycznych. Jest to jednocześnie materiał do samodzielnej pracy i stanowi podstawę do przygotowania uczniów do konkursów matematycznych.

W zbiorze umieszczone są także zadania, które w ciągu ostatniego pięciolecia obowiązywały na naszej opolskiej, lokalnej tzw. *Małej Olimpiadzie Matematycznej*.

Nie jest to jednak typowy zbiór zadań związany tematycznie z aktualnym programem nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym. W zbiorze Czytelnik znajdzie oryginalne jak i typowe zadania matematyczne o treści znanej z wcześniejszych opracowań.

Zadania pogrupowane zostały w kilku rozdziałach, które związane są z tradycyjnymi szkolnymi zadaniami matematycznymi. Staraliśmy się, aby każde zadanie trafiło do danego rozdziału nieprzypadkowo. Jednocześnie zdajemy sobie sprawę z tego, że umieszczenie jakiegoś zadania w tym, a nie innym rozdziale może budzić kontrowersje.

W zbiorze tym brakuje zadań ze stereometrii, kombinatoryki, teorii przekształceń oraz rachunku prawdopodobieństwa. Większość zadań podanych jest z rozwiązaniami. Rozwiązania zawierają często skróty myślowe, które mamy nadzieję, okażą się dość łatwe do zrozumienia.

Na końcu każdego rozdziału umieszczone są zadania do samodzielnego rozwiązywania, które można traktować jako materiał treningowy. Niektóre z tych zadań zawierają odpowiedzi lub pewne wskazówki. Zachęcamy do ich samodzielnego rozwiązywania. Odpowiedzi najlepiej wykorzystać do sprawdzenia poprawności swego rozumowania bądź do porównania z metodą rozwiązywania przedstawioną w zbiorze.

Większość podanych w tym zbiorze rozwiązań zadań opartych jest na rozwiązaniach występujących w literaturze matematycznej. Ale są też rozwiązania oparte na metodach i pomysłach przedstawionych przez uczniów na zajęciach koła matematycznego prowadzonego przez ponad 30 lat w tzw. *klasach uniwersyteckich* przy I Liceum Ogólnokształcącym im. Mikołaja Kopernika w Opolu.

Mamy nadzieję, że oddany w ręce Czytelników zbiór zadań stanie się swego rodzaju podręcznikiem samokształceniowym dla uczniów i ich nauczycieli. Liczymy również, że chociaż w niewielkim stopniu przyczyni się do rozwoju uzdolnień matematycznych uczniów.

Rozwiązywanie zadań konkursowych jest sztuką. Wymaga talentu i ciężkiej pracy uczniów i ich opiekunów. Potrzebne są również narzędzia matematyczne, których, jak mniemamy, dostarczy nasza publikacja.

W ostatnim rozdziale podane zostały zestawy zadań z etapów szkolnych i wojewódzkich z XL i XLI Małej Olimpiady Matematycznej. W przypadku zadań typowo rachunkowych podane są do nich odpowiedzi.

Autorzy

Rozdział I
WŁASNOŚCI LICZB. FUNKCJE

Zadanie. 1.1. Wiedząc, że $a < b < c < d$ ustawić w porządku rosnącym liczby:

$$x = (a+b)(c+d),\ y = (a+c)(b+d),\ z = (a+d)(b+c).$$

Rozwiązanie

$$y - x = ab + cd - ac - bd = (a-d)(b-c) > 0,$$
$$z - y = ac + bd - ad - bc = (a-b)(c-d) > 0.$$

W takim razie

$$y - x > 0 \text{ i } z - y > 0,$$

więc

$$x < y \text{ i } y < z.$$

Zatem $$x < y < z.$$

Zadanie. 1.2. Która z liczb: $\log^2 11$ czy $\log 12$ jest większa?

Rozwiązanie

$$\log 11 = \log(10 \cdot 1{,}1) = \log 10 + \log 1{,}1 = 1 + \log 1{,}1.$$

Stąd

$$\log^2 11 = (1 + \log 1{,}1)^2 = 1 + 2\log 1{,}1 + \log^2 1{,}1 >$$
$$> 1 + 2\log 1{,}1 = 1 + \log 1{,}1^2 = 1 + \log 1{,}21 =$$
$$= \log 10 + \log 1{,}21 = \log 12{,}1 > \log 12.$$

Zatem $$\log^2 11 > \log 12.$$

Zadanie. 1.3. Znaleźć taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby $n+1$ oraz $n-50$ były kwadratami liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Niech k i l będą liczbami naturalnymi takimi, że

$$n + 1 = k^2 \text{ i } n - 50 = l^2.$$

Stąd

$$k^2 - l^2 = 51 \text{ czyli } (k-l)(k+l) = 51.$$

Jedynymi rozwiązaniami tego równania w zbiorze $\boldsymbol{N}$ są pary liczb $(10, 7)$ i $(26, 25)$.

W takim razie najmniejszą liczbą naturalną spełniającą warunki zadania jest $n = 99$.

Zadanie. 1.4. Wykazać, że jeśli $c \in \boldsymbol{C}$ i $x = \dfrac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$, to $x - \dfrac{1}{x} \in \boldsymbol{C}$.

Rozwiązanie

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

Mamy:

$$x - 1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} - 1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4} - 2}{2}.$$

$$x + 1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4} + 2}{2}.$$

Zatem
$$x - \frac{1}{x} = \frac{\frac{(c+\sqrt{c^2+4}-2)}{2} \cdot \frac{(c+\sqrt{c^2+4}+2)}{2}}{\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}} =$$

$$= \frac{(c + \sqrt{c^2 + 4})^2 - 4}{4} \cdot \frac{2}{c + \sqrt{c^2 + 4}} =$$

$$= \frac{2c^2 + 2c\sqrt{c^2 + 4}}{2(c + \sqrt{c^2 + 4})} = c.$$

W związku z tym
$$x - \frac{1}{x} \in \boldsymbol{C}.$$

Zadanie. 1.5. Wykazać, że dla $a \in \boldsymbol{R}$ $a^8 + a^2 + 1 > a^5 + a$.

Rozwiązanie

Dla $a < 0$ lewa strona nierówności jest dodatnia, zaś prawa strona ujemna, a więc L > P.

Dla $a = 0$ nierówność jest prawdziwa.

Dla $a \in (0,\ 1)$ ponieważ $a^2 > a^5$, więc $a^8 + (a^2 - a^5) + (1 - a) > 0$.
Podobnie dla $a \geq 1$ mamy:

$$a^8 + a^5 + a^2 - a + 1 =$$

$$= a^5(a^3 - 1) + a(a - 1) + 1 > 0.$$

W ten sposób rozważając wszystkie możliwe przypadki udowodniliśmy daną nierówność.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZYWANIA

Zadanie. 4.26. Rozwiązać w zbiorze $\boldsymbol{N}$ równanie $3^n + 88 = m^2$.

Zadanie. 4.27. Rozwiązać w zbiorze $\boldsymbol{N}$ równania:

a) $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$,

b) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 1995$,

c) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

Zadanie. 4.28. Rozwiązać w zbiorze $\boldsymbol{C}$ równania:

a) $xy = 2x + 11y + 1$,

b) $xy = 1 + 10(x + y)$,

c) $xyz = 5(x + y + z)$,

d) $3x^2 + 5y^2 = 345$.

Zadanie. 4.29. Rozwiązać równania:

a) $x^3 = [x]$,

b) $[2^x] = x^2$,

c) $x^2 - 6[x] - 7 = 0$,

d) $[x - 1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$.

Zadanie. 4.30. Rozwiązać równania:

a) $(\sqrt{2} - 1)^x + 1 = 2(\sqrt{2} + 1)^x$,

b) $(\sqrt{x} - 2)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 1$.

Zadanie. 4.31. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$

Zadanie. 4.32. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} (ax)^{\log a} = (by)^{\log b} \\ b^{\log ax} = a^{\log bx}. \end{cases}$$

$a > 0$ i $a \neq 1$, $x > 0$
$b > 0$ i $b \neq 1$, $y > 0$.

Zadanie. 4.33. Wyznaczyć wszystkie wartości a dla których równanie $x^2 + ax + a = 0$ ma pierwiastki całkowite.

Zadanie. 4.34. Zbadać liczbę rozwiązań równania
$mx^2 - m|x| + m - 1 = 0$ w zależności od wartości parametru $m \in \mathbf{R}$.

Zadanie. 4.35. Ile istnieje równań postaci $x^2 - px - q = 0$, których współczynniki p, $q \in \mathbf{N}$ i pierwiastki dodatnie są mniejsze od 10.

Zadanie. 4.36. Wyznaczyć zbiór wartości parametru m, dla których równanie $\frac{|x|}{x+1} = \frac{m-2}{x}$ ma 3 rozwiązania.

Zadanie. 4.37. Wykazać, że jeśli liczby x, y, z spełniają równania $x + y + z = xyz$ i $x^2 = yz$ oraz $x \neq 0$, to $x^2 > 3$.

Zadanie. 4.38. Dla jakich $a \in \mathbf{R}$ równanie
$|||x| - 1| - a| = 4$ ma dokładnie 5 rozwiązań?

Zadanie. 4.39

Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 3. \end{cases}$