

Witold Bednarek

# CIEKAWA MATEMATYKA

dla uczniów gimnazjum



OPOLE  
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.  
2014

SKŁAD KOMPUTEROWY I RYSUNKI

Barbara Kwaśnicka


PROJEKT OKŁADKI

Tomasz Fronckiewicz

ISBN: 978-83-62687-49-7

Wydanie pierwsze, Opole 2014

© Copyright by Wydawnictwo NOWIK Sp.j.

 Wydawnictwo NOWIK Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Wszelkie prawa zastrzeżone. Rozpowszechnianie bez zgody Wydawcy całości publikacji lub jej fragmentów w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Kopiowanie metodą kserograficzną, fotograficzną, umieszczanie na nośnikach magnetycznych i optycznych i innych narusza prawa autorskie niniejszej publikacji.

### **Kserowanie zabija książki!**

Szanowny Czytelniku, jeśli chcesz wyrazić swoją opinię na temat tej publikacji, prosimy o kontakt mailowy [matma@nowik.com.pl](mailto:matma@nowik.com.pl) lub wypełnienie formularza na naszej stronie [www.nowik.com.pl](http://www.nowik.com.pl)

Wydrukowano w Polsce

Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na [www.nowik.com.pl](http://www.nowik.com.pl)

Dystrybucja:

Wydawnictwo NOWIK Sp.j. Biuro Handlowe:

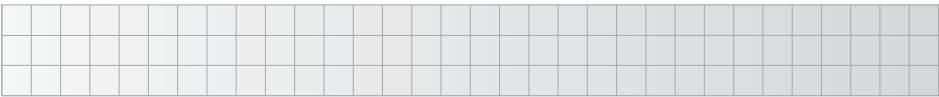
45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Tel./fax 77 454 36 04

<http://www.nowik.com.pl> e-mail: [biuro@nowik.com.pl](mailto:biuro@nowik.com.pl)

# SPIS TREŚCI

Przedmowa .....	5
1. Magiczne łamane zamknięte .....	7
2. Koła liczb .....	9
3. Szachownice .....	10
4. Kryptarytmy .....	11
5. Zakreskowane figury .....	12
6. Liczby pierwsze .....	13
7. Palindromy .....	15
8. Zadania Diofantosa .....	17
9. Gra w $3n + 1$ .....	19
10. Liczby doskonałe .....	20
11. Nietypowe cechy podzielności .....	21
12. Wzory skróconego mnożenia .....	24
13. Reszty z dzielenia kwadratów .....	26
14. Zadania z zapisem dziesiętnym .....	28
15. Dowodzenie nierówności .....	31
16. Punkty szczególne trójkąta .....	34
17. Kąty .....	37
18. Twierdzenie Pitagorasa .....	39
19. Wzór Herona .....	42
20. Okręgi wpisane i opisane na czworokątach .....	44
21. Twierdzenie Talesa .....	47
22. Wzór Eulera .....	50



23. Zadania tekstowe .....	51
24. Ułamki proste .....	52
25. Ułamki okresowe .....	54
26. Pierwiastki wymierne i niewymierne .....	58
27. Duże liczby .....	60
28. Formuły na liczbę $\pi$ .....	61
29. Ciekawe równości .....	62
30. Tożsamości arytmetyczne .....	64
31. Zadania różne .....	65
32. Odpowiedzi i rozwiązania .....	70



# PRZEDMOWA

Nie można się oprzeć wrażeniu, że formuły matematyczne mają niezależny od nas byt i inteligencję, że są mądrzejsze niż my sami, nawet mądrzejsze niż ich odkrywcy i że możemy wywnioskować z nich więcej niż poprzednio w nich zawarto.

Heinrich Rudolph Hertz, fizyk niemiecki, 1857–1894

Niniejsza książka przeznaczona jest dla uczniów klas gimnazjalnych, którzy lubią rozwiązywać nieschematyczne zadania matematyczne i logiczne, a także chcą rozszerzyć swoją wiedzę.

Prezentowanych tu tematów Czytelnik nie znajdzie w typowych podręcznikach szkolnych. Zadania są różnorodne i ich poziom trudności jest zróżnicowany: od zupełnie łatwych do tych, których rozwiązanie wymaga dużej pomysłowości.

Niektóre problemy podane są jako ciekawostki. Mimo prostoty ich sformułowania, do tej pory jeszcze nikt nie znalazł ich rozwiązania.

Mam nadzieję, że Czytelnik przyjemnie i pożytecznie spędzi czas w trakcie lektury tej książki.

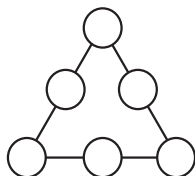
Autor



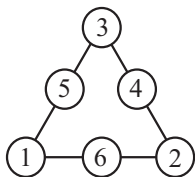
# 1. MAGICZNE ŁAMANE ZAMKNIĘTE

## Zadanie 1.

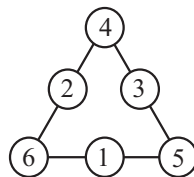
W puste kółeczka wpisz liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby sumy na bokach były równe:



Oto możliwe rozwiązania:



Suma na każdym boku wynosi 9.



Suma na każdym boku wynosi 12.

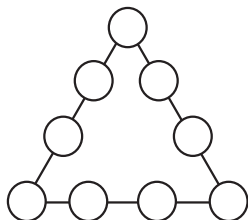
Znajdź takie dwa rozmieszczenia liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby suma na każdym boku wynosiła:

a) 10;

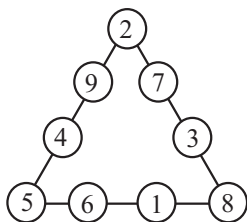
b) 11.

## Zadanie 2.

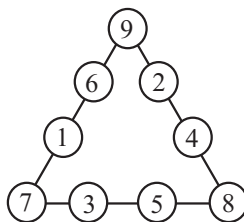
W puste kółeczka wpisz liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, aby sumy na bokach były równe.



Oto dwa z wielu rozwiązań:



Suma na każdym boku wynosi 20.



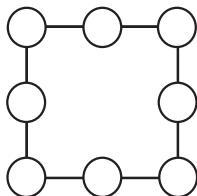
Suma na każdym boku wynosi 23.

Znajdź inne takie rozmieszczenia liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, aby suma na każdym boku wynosiła:

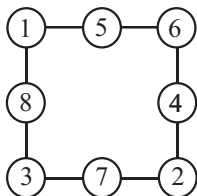
- a) 21;      b) 22;      c) 24.

### Zadanie 3.

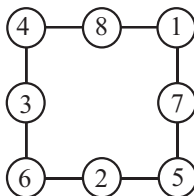
W puste kółeczka wpisz liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, aby sumy na bokach były równe:



Oto dwa rozwiązania:



Suma na każdym boku wynosi 12.



Suma na każdym boku wynosi 13.

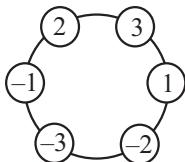
Znajdź inne takie rozmieszczenia liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, aby suma na każdym boku wynosiła:

- a) 11;      b) 14;      c) 15;      d) 16.



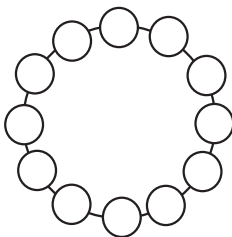
## 2. KOŁA LICZB

Rozważmy koło z wpisanymi liczbami:



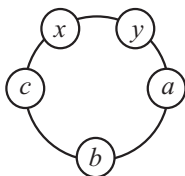
Zauważ, że każda liczba w polu jest sumą dwóch liczb z nią sąsiadujących.

W ten sam sposób wpisz odpowiednie niezerowe liczby w koło:



Czy w koła, które składają się z 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 kóleczek podobne wpisywania są możliwe?

Dla przykładu rozważmy koło:



Wtedy

$$a = y - x$$

$$b = a - y = y - x - y = -x$$

$$c = b - a = -x - (y - x) = -x - y + x = -y$$

$$x = c - b = -y - (-x) = -y + x$$

$$y = x - c = x - (-y) = x + y$$

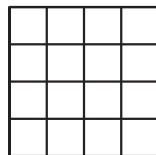
Zatem  $x = -y + x$ , skąd  $y = 0$  oraz  $y = x + y$ , skąd  $x = 0$ .

Wobec tego wszystkie liczby są zerami.

### 3. SZACHOWNICE

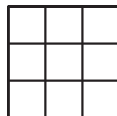
#### Zadanie 1.

W pola szachownicy  $4 \times 4$  wpisz litery A, B, C, D w ten sposób, że w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych każda z liter występowała dokładnie jeden raz.



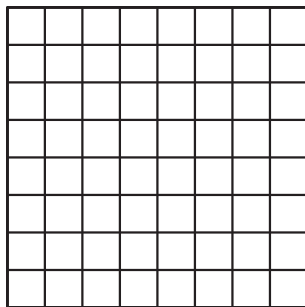
#### Zadanie 2.

W pola szachownicy  $3 \times 3$  wpisz liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tak, aby sumy liczb w wierszach, w kolumnach i na obu przekątnych były równe.



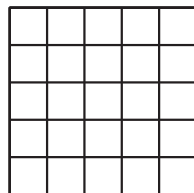
#### Zadanie 3.

Ustaw na szachownicy  $8 \times 8$  osiem hetmanów w ten sposób, że każdy z hetmanów nie szachuje żadnego z pozostałych.



#### Zadanie 4.

Szachownicę  $5 \times 5$  należy obejść konikiem szachowym (na każdym polu konik znajduje się dokładnie jeden raz). Jak to zrobić?



## 4. KRYPTARYTMY

Symbol typu  $\overline{ABCD}$  oznacza zapis dziesiętny liczby naturalnej o cyfrach  $A, B, C, D$ .

W poniższych równaniach należy znaleźć cyfry ukrywające się za literami:

$$1) \overline{AA} + \overline{AA} = \overline{BBC}.$$

$$2) \overline{AA} + \overline{BB} = \overline{AAC}.$$

$$3) \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{CAC}.$$

$$4) \overline{AB} + \overline{AAB} = \overline{BCA}.$$

$$5) \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{BBC}.$$

$$6) \overline{AA} + \overline{BB} = \overline{CAC}.$$

$$7) \overline{AA} + \overline{BA} = \overline{CBB}.$$

$$8) \overline{AAB} + \overline{BB} = \overline{BAA}.$$

$$9) \overline{AB} + \overline{AAB} = \overline{BCA}.$$

$$10) \overline{AAA} + \overline{BB} = \overline{CDCD}.$$

## 5. ZAKRESKOWANE FIGURY

W poniższych rysunkach należy obliczyć pole zakreskowanej figury.

