Grzegorz Bryll, Robert Sochacki

Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki

Wydanie drugie, rozszerzone

Opole 2012

Recenzent
Jurij Povstenko

Redaktor
Robert Sochacki

Projekt okładki
Michał Nowik

Wydawnictwo Nowik Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

ISBN 978-83-62687-21-3

Wydrukowane w Polsce

Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na www.nowik.com.pl

---

Dystrybucja:
Wydawnictwo Nowik Sp.j. Biuro Handlowe:
45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104
Tel./fax 77 454 36 04
http://www.nowik.com.pl e-mail: biuro@nowik.com.pl
e-mail: matma@nowik.com.pl

SPIS TREŚCI

OD AUTORÓW

Niniejsze opracowanie powstało na podstawie wykładów i ćwiczeń z dydaktyki matematyki prowadzonych przez autorów na Uniwersytecie Opolskim i w Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, a także w oparciu o artykuły o charakterze dydaktycznym zamieszczone w różnych czasopismach.

W pracy omówiono przede wszystkim te zagadnienia, które są pomijane lub wzmiankowane w opracowaniach zwartych. Zdajemy sobie sprawę, że wiele z tych zagadnień wykracza poza ramy dydaktyki matematyki dotyczącej poziomu podstawowego, gimnazjalnego i ponadgimnazjalnego. Wzbogacenie jednak wiedzy nauczycieli i uczniów o mało spopularyzowane metody nauczania niektórych zagadnień matematycznych może przynieść nie tylko korzyści osobiste, ale także uatrakcyjnić samą matematykę szkolną.

Zawartość opracowania podzielono na trzy części: I − algebra i analiza matematyczna, II − geometria, III − logika. Poszczególne rozdziały stanowią na ogół niezależne całości. Z tego też względu po rozdziałach podany został wykaz odpowiedniej literatury. Pozycje literaturowe oznaczone są symbolami [a.b], gdzie a oznacza numer rozdziału, zaś b oznacza numer kolejny w danym rozdziale.

Składamy gorące podziękowania Panu prof. dr hab. Jurijowi Povstence z Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie za cenne i wnikliwe uwagi, które pozwoliły uniknąć wielu usterek i błędów, oraz w sposób istotny przyczyniły się do ostatecznego kształtu książki. Dziękujemy również Panu dr inż. Romanowi Rygałowi za elektroniczne przygotowanie tekstu.

Autorzy będą bardzo wdzięczni za wszelkie uwagi dotyczące opracowania.

Grzegorz Bryll
Robert Sochacki

Część I

ALGEBRA I ANALIZA MATEMATYCZNA

ROZDZIAŁ 1.

CIAŁO UŁAMKÓW PIERŚCIENIA CAŁKOWITEGO

Przypomnijmy, że układ $(P,+,\cdot)$, gdzie $P \neq \varnothing$, jest pierścieniem, gdy spełnione są warunki:

1. Układ (P, +) jest grupą abelową.
2. Działanie „·” jest obustronnie rozdzielne względem działania „+”.

W definicji pierścienia nie zakładamy, że działanie „·” jest łączne. Element neutralny grupy (P, +) nazywamy zerem pierścienia i oznaczamy go przez 0.

Jeśli w pierścieniu P działanie „·” spełnia warunki:

a) $\underset{a,\, b,\, c \in P}{\forall} \left[a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \right]$

b) $\underset{a,\, b \in P}{\forall} \left[a \cdot b = b \cdot a \right]$

c) $\underset{c \in P}{\exists} \ \underset{a \in P}{\forall} \left[a \cdot c = c \cdot a = a \right]$

d) $\underset{a,\, b \in P}{\forall} \left[a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0 \right]$

to pierścień P nazywamy odpowiednio: pierścieniem łącznym, pierścieniem przemiennym, pierścieniem z jednością, pierścieniem bez dzielników zera.

Pierścieniem całkowitym nazywamy pierścień łączno-przemienny bez dzielników zera. Pierścień całkowity może więc nie posiadać jedności.

Pierścień P z jednością nazywamy ciałem, gdy spełnione są warunki:

e) $\overline{\overline{P}} \geq 2$

f) $\underset{a,\, b \in P}{\forall} \left[a \neq 0 \Rightarrow \underset{c \in P}{\exists_1} \left(a \cdot c = b \right) \right]$

g) $\underset{a,\, b \in P}{\forall} \left[a \neq 0 \Rightarrow \underset{c \in P}{\exists_1} \left(c \cdot a = b \right) \right]$

W definicji ciała nie zakładamy, że działanie „·” jest łączne i przemienne [1.4]. Ciało łączne P można scharakteryzować następująco:

1. P jest pierścieniem,
2. $\overline{\overline{P}} \geq 2$,
3. $\left(P \setminus \{ 0 \};\ \cdot \right)$ jest grupą.

Konstrukcja ciała ułamków dla danego pierścienia całkowitego przedstawia się następująco[1]:

Niech $(P,+,\cdot)$ będzie pierścieniem całkowitym i niech

$$P^* = \{ \langle a,b \rangle : a,b \in P \wedge b \neq 0 \}$$

W zbiorze P^* określamy relację R oraz działania $\oplus$ i $\odot$, przyjmując definicje:

Definicja 1.1.

$$\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Definicja 1.2.

a) $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a \cdot d + b \cdot c,\ b \cdot d \rangle$

b) $\langle a,b \rangle \odot \langle c,d \rangle = \langle a \cdot c,\ b \cdot d \rangle$

Relacja R określona przez definicję 1.1 jest relacją typu równoważności, a więc jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Można więc tworzyć klasy abstrakcji i zbiór ilorazowy P^*/R:

$$P^*/R = \left\{ \alpha : \underset{\langle a,b \rangle \in P^*}{\exists} \left(\alpha = [\langle a,b \rangle]_R \right) \right\}$$

Łatwo sprawdzić, że relacja R jest zgodna z działaniami $\oplus$ i $\odot$, tzn. dla dowolnych $\langle a, b \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle \in P^*$ spełniony jest warunek [1.4]:

$$\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle \wedge \langle a_1,b_1 \rangle R \langle c_1,d_1 \rangle \Rightarrow \left(\langle a,b \rangle \oplus \langle a_1,b_1 \rangle \right) R \left(\langle c,d \rangle \oplus \langle c_1,d_1 \rangle \right) \wedge$$
$$\wedge \left(\langle a,b \rangle \odot \langle a_1,b_1 \rangle \right) R \left(\langle c,d \rangle \odot \langle c_1,d_1 \rangle \right)$$

Relacja R jest więc kongruencją w zbiorze P*. Generuje ona w zbiorze P^*/R działania $\boxplus$ i $\boxdot$ określone następująco:

Definicja 1.3.

a) $[\langle a,b \rangle]_R \boxplus [\langle c,d \rangle]_R = [\langle a,b \rangle \oplus \langle c,d \rangle]_R$

b) $[\langle a,b \rangle]_R \boxdot [\langle c,d \rangle]_R = [\langle a,b \rangle \odot \langle c,d \rangle]_R$

[1] Pomijamy w tej konstrukcji pierścień jednoelementowy, składający się z samego zera.

Twierdzenie 1.1.

Zbiór P^*/R z działaniami $\boxplus$ i $\boxdot$ jest ciałem łączno-przemiennym[2].

Ciało $\left(P^*/R, \boxplus, \boxdot\right)$ nazywamy ciałem ułamków danego pierścienia całkowitego $(P,+,\cdot)$. Element $\left[\langle a, b\rangle\right]_R$ należący do P^*/R będziemy zapisywać w postaci $\frac{a}{b}$ i nazywać ułamkiem. Mamy więc:

$$\frac{a}{b} \boxplus \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \boxdot \frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Elementem neutralnym działania $\boxplus$ jest ułamek $\frac{0}{b}$, elementem neutralnym działania $\boxdot$ jest ułamek $\frac{b}{b}$, elementem przeciwnym do ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{-a}{b}$, $\left(b \in P \wedge b \neq 0\right)$, zaś elementem odwrotnym do ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$, (o ile $a \neq 0)$.

Wykażemy, że ciało ułamków $\left(P^*/R, \boxplus, \boxdot\right)$ zawiera podpierścień izomorficzny z pierścieniem *P*. Niech więc P_1 będzie zbiorem wszystkich ułamków postaci $\frac{a\cdot b}{a}$, gdzie $a \neq 0$. Funkcją ustalającą izomorfizm pomiędzy pierścieniami P_1 i P jest funkcja $\varphi : P_1 \to P$ określona wzorem $\varphi\left(\frac{a\cdot b}{a}\right) = b$.

Istotnie funkcja φ jest bijekcją i ponadto spełnione są warunki:

$$\varphi\left(\frac{a\cdot b}{a} \boxplus \frac{a\cdot c}{a}\right) = \varphi\left(\frac{a^2\cdot b + a^2\cdot c}{a^2}\right) = \varphi\left(\frac{a\cdot (b+c)}{a}\right) = b + c =$$

$$= \varphi\left(\frac{a\cdot b}{a}\right) + \varphi\left(\frac{a\cdot c}{a}\right)$$

[2] Dowód można znaleźć w pracy [1.4].

$$\varphi\left(\frac{a\cdot b}{a}\boxdot\frac{a\cdot c}{a}\right)=\varphi\left(\frac{(a\cdot b)\cdot(a\cdot c)}{a^2}\right)=\varphi\left(\frac{a^2(b\cdot c)}{a^2}\right)=\varphi\left(\frac{a\cdot(b\cdot c)}{a}\right)=b\cdot c=$$
$$=\varphi\left(\frac{a\cdot b}{a}\right)\cdot\varphi\left(\frac{a\cdot c}{a}\right)$$

Przykład 1.1.

Ciałem ułamków dla pierścienia liczb całkowitych $(Z, +, \cdot)$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia, jest ciało liczb wymiernych $\left(Z^*/R, \boxplus, \boxdot\right), \left(Z^*/R = Q\right)$. Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem Z jest pierścień $(Q_1, \boxplus, \boxdot)$ ułamków postaci $\frac{a\cdot b}{a}$, gdzie $a,b\in Z$ i $a\neq 0$.

Przykład 1.2.

Ciałem ułamków dla pierścienia wielomianów $(K[x], +, \cdot)$ nad ciałem łączno-przemiennym K jest ciało funkcji wymiernych $\left(K^*[x]/R, \boxplus, \boxdot\right)$, tj. ciało ułamków postaci $\frac{f}{g}$, gdzie f, g są wielomianami (zmiennej x) i g nie jest wielomianem zerowym.

Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem $K[x]$ jest pierścień $(K_1, \boxplus, \boxdot)$ funkcji wymiernych postaci $\frac{f\cdot g}{f}$, gdzie f, g są wielomianami i f nie jest wielomianem zerowym.

Przykład 1.3.

Ciało operatorów Mikusińskiego

Rozważmy układ $(M, +, *)$, gdzie M jest zbiorem wszystkich funkcji klasy C^1 określonych w przedziale $\langle 0,+\infty)$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb zespolonych[3], zaś działanie dodawania funkcji „+” i działanie „splotu” funkcji „*” są określone następująco:

$$h=f+g\Leftrightarrow\underset{t\geq 0}{\forall}\left[h(t)=f(t)+g(t)\right]$$
$$h=f*g\Leftrightarrow\underset{t\geq 0}{\forall}\left[h(t)=\int_0^t f(t-x)\cdot g(x)\,dx\right]$$

[3] Można też brać pod uwagę zbiór M funkcji klasy C (zob. [1.6]) bądź też zbiór funkcji mierzalnych w sensie Lebesque’a (zob. [1.8]).

Można wykazać, że [1.5, 1.6]:

Twierdzenie 1.2.
Układ $(M, +, *)$ jest pierścieniem łączno-przemiennym bez dzielników zera i bez jedności.

Pierścień $(M, +, *)$ nazywamy pierścieniem Mikusińskiego.

Rozważmy z kolei układ $(M^*, \oplus, \odot)$, gdzie $M^* = M \times (M \setminus \{0\})$[4], zaś relacja R i działania $\oplus, \odot$ określone są następująco:

$$\langle f,\ g\rangle R \langle f_1,\ g_1\rangle \Leftrightarrow f * g_1 = g * f_1$$
$$\langle f,\ g\rangle \oplus \langle f_1,\ g_1\rangle = \langle f * g_1 + g * f_1,\ g * g_1\rangle$$
$$\langle f,\ g\rangle \odot \langle f_1,\ g_1\rangle = \langle f * f_1,\ g * g_1\rangle$$

Kongruencja R generuje w zbiorze ilorazowym M^*/R działania $\boxplus, \boxdot$ określone wzorami:

$$\frac{f}{g} \boxplus \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * g_1 + g * f_1}{g * g_1}, \qquad \frac{f}{g} \boxdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * f_1}{g * g_1}$$

Ciało ułamków $\left(M^*/R,\ \boxplus,\ \boxdot\right)$ nazywamy ciałem operatorów Mikusińskiego, zaś elementy zbioru M^*/R nazywamy operatorami. Operatorami są więc klasy abstrakcji wyznaczone przez relację R i pary uporządkowane postaci $(f,\ g)$, gdzie $f,\ g \in M$ i $g \neq 0$.

Pierścieniem izomorficznym z pierścieniem Mikusińskiego M jest pierścień $(M_1,\ \boxplus,\ \boxdot)$, gdzie

$$M_1 = \left\{\alpha \in M^*/R:\ \underset{f}{\exists}\left(\alpha = \frac{f * \mathbf{1}}{\mathbf{1}}\right)\right\}$$

Z tego względu operatory postaci $\frac{f * \mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ utożsamia się często z funkcjami.

Ciało operatorów $\left(M^*/R,\ \boxplus,\ \boxdot\right)$ zawiera następujące podciało M_0 izomorficzne z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$:

[4] Funkcję stałą a określamy wzorem $a(t) = a$ dla $t \in \langle 0, +\infty)$.

$$M_0 = \left\{ \alpha \in M^* /_R : \underset{a\in\mathbb{C}}{\exists} \left(\alpha = \frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \right) \right\}$$ [5]

Izomorfizm pomiędzy ciałami $(M_0, \boxplus, \boxdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ustala funkcja $\psi : M_0 \to \mathbb{C}$ o własności: $\psi\left(\frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}}\right) = a$. Z uwagi na powyższy izomorfizm operatory postaci $\frac{a \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ można utożsamiać z liczbami zespolonymi.

Dla przykładu iloczyn funkcji stałych **2** i **3** oraz iloczyn liczb 2 i 3 wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = \frac{\mathbf{2} * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \boxdot \frac{\mathbf{3} * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{(\mathbf{2} * \mathbf{1}) * (\mathbf{3} * \mathbf{1})}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(\mathbf{2} * \mathbf{3}) * \mathbf{1} * \mathbf{1}}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(\mathbf{2} * \mathbf{3}) * \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2} * \mathbf{3} = 6 * \mathbf{1}$$ [6]

$$2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} \boxdot \frac{3 \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{(2 \cdot \mathbf{1}) * (3 \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{[(2 \cdot 3) \cdot \mathbf{1}] * \mathbf{1}}{\mathbf{1} * \mathbf{1}} = \frac{(2 \cdot 3) \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 2 \cdot 3 = 6$$

Ciało operatorów można skonstruować również w następujący sposób. W zbiorze *M*, oprócz działania „+”, określamy działanie „$\circ$” (mnożenie funkcji) następująco:

$$h = f \circ g \Leftrightarrow \underset{t \geq 0}{\forall} \left[h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t - x) \cdot g(x) dx \right]$$

Można wykazać (zob. [1.1, 1.7]), że układ $(M, +, \circ)$ jest pierścieniem łączno-przemiennym z jednością, bez dzielników zera. Jednością tego pierścienia jest funkcja stała **1**. Można więc w znany sposób skonstruować ciało ułamków dla tego pierścienia.

Pierścień $(M, +, \circ)$ różni się istotnie od pierścienia $(M, +, *)$, bowiem w tym ostatnim brak jest elementu neutralnego dla działania „$*$”. Pierścienie te nie są więc izomorficzne, posiadają jednak wspólne ciało ułamków (zob. [1.3]).

Zauważmy przy okazji, że istnieją pierścienie całkowite izomorficzne o tym samym uniwersum, które nie posiadają wspólnego ciała ułamków. Takimi pierścieniami są pierścień liczb całkowitych $(Z, +, \cdot)$ ze zwykłymi działaniami do-

---

[5] Iloczyn funkcji *f* przez liczbę zespoloną *a* określamy następująco:

$$h = a \cdot f \Leftrightarrow \underset{t \geq 0}{\forall} \left[h(t) = a \cdot f(t) \right]$$

[6] Symbolem ***t*** oznaczamy funkcję liniową o własności: $\boldsymbol{t}(t) = t$ dla $t \in \langle 0, +\infty)$.

dawania i mnożenia oraz pierścień liczb całkowitych $(Z, \oplus, \odot)$, gdzie działania $\oplus, \odot$ określone są następująco:

$$a \oplus b = a + b + 1\ , \qquad a \odot b = a + b + a \cdot b$$

Izomorfizmem jest tutaj funkcja $\Phi : Z \to Z$ określona wzorem

$$\Phi(a) = a + 1$$

Wynik dotyczący istnienia wspólnego ciała operatorów Mikusińskiego dla dwóch nieizomorficznych pierścieni całkowitych nad tym samym uniwersum można uogólnić następująco (zob. [1.2]):

Twierdzenie 1.3.
Pierścienie całkowite $(A, +, \cdot), (A, +, \circ)$ o tej samej grupie addytywnej $(A, +)$ mają wspólne ciało ułamków wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\text{(I)} \qquad \underset{\alpha,\beta\in A, \alpha\neq 0, \beta\neq 0}{\exists} \left\{ \underset{a,b\in A}{\forall} \left[\alpha \cdot (a \circ b) = \beta \cdot a \cdot b \right] \vee \underset{a,b\in A}{\forall} \left[\alpha \circ a \circ b = \beta \circ (a \cdot b) \right] \right\}$$

Jeśli $\beta = \lambda \cdot a$ lub $\alpha = \lambda \circ \beta$ (gdzie $\lambda \in A$), to warunek (I) przyjmuje postać:

$$\text{(II)} \qquad \underset{\lambda\in A, \lambda\neq 0}{\exists} \left[\underset{a,b\in A}{\forall} (a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b) \vee \underset{a,b\in A}{\forall} (a \cdot b = \lambda \circ a \circ b) \right]$$

Wniosek 1.1.
Jeżeli w pierścieniu całkowitym $(A, +, \cdot)$ działanie „$\circ$” określone jest następująco:

$$a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b \quad (a, b \in A) \tag{1.1}$$

gdzie λ jest ustalonym elementem zbioru A, różnym od 0, to:

(a) układ $(A, +, \circ)$ jest pierścieniem całkowitym,

(b) pierścienie $(A, +, \cdot), (A, +, \circ)$ mają wspólne ciało ułamków.

Wzór (1.1) zachodzi na przykład w pierścieniu całkowitym, służącym do konstrukcji ciała operatorów Mikusińskiego. Istotnie, jeśli w zbiorze funkcji klasy C^1, określonych w przedziale $\langle 0, +\infty)$ i przyjmujących wartości w zbiorze liczb zespolonych, zdefiniowano działania „+”, „$*$”, „$\circ$” wzorami:

$$h = f + g \Leftrightarrow \underset{t\geq 0}{\forall} \left[h(t) = f(t) + g(t) \right]$$

$$h = f * g \Leftrightarrow \underset{t\geq 0}{\forall} \left[h(t) = \int_0^t f(t-x) g(x) dx \right]$$

$$h = f \circ g \Leftrightarrow \underset{t \geq 0}{\forall} \left[h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-x) g(x) dx \right]$$

to $f * g = \lambda \circ f \circ g$, gdzie $f, g, \lambda \in C^1$ i $\lambda(t) = t$ dla dowolnego $t \in \langle 0, +\infty)$.

Zauważmy jeszcze, że warunek (I) może zachodzić również dla pierścieni całkowitych o tej samej grupie addytywnej, w których żadne z działań „*mnożenia*” nie jest definiowalne przez pozostałe. Na przykład: jeśli w pierścieniu $(Z, +, \cdot)$ liczb całkowitych ze zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem określimy działania Δ i ∇ następująco:

$$a \Delta b = \lambda_1 \cdot a \cdot b, \qquad a \nabla b = \lambda_2 \cdot a \cdot b$$

(gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in Z$) i żadna z liczb całkowitych λ_1, λ_2 nie jest wielokrotnością drugiej, to w pierścieniach całkowitych $(Z,+,\Delta), (Z,+,\nabla)$ dla działań Δ, ∇ zachodzą związki:

$$\lambda_2 \nabla (a \Delta b) = \lambda_1 \nabla (a \nabla b)$$
$$\lambda_1 \Delta (a \nabla b) = \lambda_2 \Delta (a \Delta b)$$

Spełniony jest więc warunek (I).

Pierścień liczb całkowitych $(Z, +, \cdot)$ ze zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem ma następującą własność specyficzną (zob. [1.2]):

Twierdzenie 1.4.
Jeżeli w pierścieniu $(Z, +, \cdot)$ działanie „$\circ$” jest definiowalne przez działania tego pierścienia i układ $(Z, +, \circ)$ jest pierścieniem całkowitym, to zachodzi warunek:

(III) $$\underset{\substack{\lambda \in Z \\ \lambda \neq 0}}{\exists} \ \underset{a,\, b \in Z}{\forall} \left[a \circ b = \lambda \cdot a \cdot b \right]$$

Literatura

[1.1] Berg L., *Einführung in die Operatoren rechnung,* Berlin 1962.

[1.2] Bryll G., Blidia M., *O ciałach ułamków pierścieni całkowitych,* ZN WSP w Opolu, Matematyka 1990, nr 27, s. 79-86.

[1.3] Bryll G., Oniszczyk R., *Sposoby konstrukcji ciała operatorów Mikusińskiego,* ZN WSI w Opolu, Problematyka różna 1972, z. 2, s. 3-15.

[1.4] Gleichgewicht B., *Elementy algebry abstrakcyjnej,* Biblioteczka Matematyczna, PZWS, Warszawa 1966, nr 24.

[1.5] Mikusiński J., *Sur les fondements du calcul opératoire,* Studia Mathematica 1950, nr 11, s. 41-70.

[1.6] Mikusiński J., *Rachunek operatorów*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1957.
[1.7] Rajewski M., *Berechnung der Einschaltvorgänge in linearen Schaltungen mittels "abgeschnitterer" Functionen*, Wiss. Z. Hochsch. f. Elektrotechnik (Ilmenau) 1958, nr 4, s. 143-165.
[1.8] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste*, t. II, PWN, Warszawa 1959.