

Anna Płońska

**Jak pokonać trudności z matematyką
w szkole ponadgimnazjalnej**

Karty pracy dla uczniów



OPOLE
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
2016



© Copyright by Wydawnictwo Nowik Sp.j. 2016
Wydawnictwo Nowik Sp.j. 45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104

Wydanie pierwsze, Opole 2016
ISBN: 978-83-62687-77-0

REDAKCJA: *Wydawnictwo Nowik Sp.j.*
SKŁAD I ŁAMANIE: *Jolanta Brodziak*
PROJEKT OKŁADKI: *Tomasz Fronckiewicz*

Wszelkie prawa zastrzeżone.
Rozpowszechnianie bez zgody Wydawcy całości publikacji lub jej fragmentów
w jakiegokolwiek postaci jest zabronione.

Kopiowanie metodą kserograficzną, fotograficzną, umieszczanie
na nośnikach magnetycznych i optycznych i innych narusza prawa autorskie niniejszej
publikacji.

Kserowanie zabija książki!

Szanowny Czytelniku, jeżeli chcesz wyrazić swoją opinię na temat tej publikacji, prosimy
o kontakt mailowy matma@nowik.com.pl
lub wypełnienie formularza na naszej stronie www.nowik.com.pl

Wydrukowane w Polsce
Szczegółowe informacje o naszych publikacjach na www.nowik.com.pl

Dystrybucja:

Wydawnictwo Nowik Sp.j. Biuro Handlowe:
45-061 Opole, ul. Katowicka 39/104
Tel./fax 77 454 36 04
<http://www.nowik.com.pl> e-mail: biuro@nowik.com.pl

Spis treści

Wstęp	5
Opis kart pracy pod kątem ich przydatności do pracy z uczniem o specyficznych problemach w uczeniu się matematyki	9
Karta pracy 1. Zbiory liczbowe	13
Karta pracy 2. Przedziały liczbowe	18
Karta pracy 3. Obliczenia procentowe	22
Karta pracy 4. Wzory skróconego mnożenia	30
Karta pracy 5. Działania na pierwiastkach	32
Karta pracy 6. Usuwanie niewymierności z mianownika	39
Karta pracy 7. Działania na potęgach	41
Karta pracy 8. Działania na logarytmach	46
Karta pracy 9. Wykres i własności funkcji $y = a^x$	52
Karta pracy 10. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej	58
Karta pracy 11. Przybliżenia	62
Karta pracy 12. Wykres i własności funkcji liniowej	65
Karta pracy 13. Miejsce zerowe funkcji liniowej	72
Karta pracy 14. Proste równoległe	74
Karta pracy 15. Proste prostopadłe	76
Karta pracy 16. Równanie liniowe	78
Karta pracy 17. Zadania tekstowe sprowadzalne do równań liniowych	81
Karta pracy 18. Nierówność liniowa	84
Karta pracy 19. Układy równań liniowych	87
Karta pracy 20. Wykres i własności funkcji $y = ax^2$	95
Karta pracy 21. Wykres i własności funkcji $y = ax^2 + q$, $y = a(x - p)^2$	99
Karta pracy 22. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej	105
Karta pracy 23. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	108
Karta pracy 24. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej	111
Karta pracy 25. Równanie kwadratowe	114
Karta pracy 26. Nierówność kwadratowa	118
Karta pracy 27. Równanie stopnia większego niż 2	123
Karta pracy 28. Równanie wymierne	128
Karta pracy 29. Wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$	131
Karta pracy 30. Sposoby opisu ciągu	137
Karta pracy 31. Pojęcie i wzór ogólny ciągu arytmetycznego	142

Karta pracy 32. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	147
Karta pracy 33. Pojęcie i wzór ogólny ciągu geometrycznego	151
Karta pracy 34. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	156
Karta pracy 35. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego	160
Karta pracy 36. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego	166
Karta pracy 37. Podstawowe tożsamości i wzory trygonometryczne	170
Karta pracy 38. Odległość między punktami w układzie współrzędnych. Środek odcinka	173
Karta pracy 39. Równanie prostej	178
Karta pracy 40. Pole trójkąta	184
Karta pracy 41. Pole trójkąta równobocznego	189
Karta pracy 42. Okrąg wpisany w trójkąt	192
Karta pracy 43. Okrąg opisany na trójkącie	195
Karta pracy 44. Pole kwadratu	198
Karta pracy 45. Pole równoległoboku	202
Karta pracy 46. Pole rombu	207
Karta pracy 47. Pole trapezu	212
Karta pracy 48. Kąty w okręgu	215
Karta pracy 49. Kąty wielokąta foremnego	218
Karta pracy 50. Pola wielokątów podobnych	221
Karta pracy 51. Kombinatoryka	225
Karta pracy 52. Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia losowe	228
Karta pracy 53. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	231
Karta pracy 54. Średnia arytmetyczna	235
Karta pracy 55. Mediana	240
Karta pracy 56. Średnia ważona	243
Karta pracy 57. Wariancja i odchylenie standardowe	246
Karta pracy 58. Sześciian	249
Karta pracy 59. Prostopadłościan	251
Karta pracy 60. Graniastosłupy proste trójkątne	258
Karta pracy 61. Graniastosłupy proste czworokątne	262
Karta pracy 62. Czworoscian foremny	266
Karta pracy 63. Ostrosłupy proste trójkątne	270
Karta pracy 64. Ostrosłupy proste czworokątne	274
Karta pracy 65. Walec	278
Karta pracy 66. Stożek	281
Karta pracy 67. Kula	284

*Wszystko należy upraszczać jak tylko można,
ale nie bardziej*

Albert Einstein

Wstęp

Proces dydaktyczny w szkołach obejmuje wszystkich uczniów, także tych, którzy z trudem radzą sobie z matematyką. Często są to uczniowie, którzy dotarli już do czwartego etapu edukacyjnego, ale mają zaległości z poprzednich etapów bądź zakorzenił się w nich lęk przed matematyką i niechęć do tego przedmiotu. Przyczyną ich niepowodzeń w nauce może być lenistwo, nieskuteczność działań dydaktycznych i wychowawczych szkoły albo zaniedbania rodziny i środowiska. Żeby owe niepowodzenia wyeliminować, czasami wystarczy takich uczniów zmotywować do nauki, nakłonić do systematycznej pracy, podwyższyć ich samoocenę czy zainteresować matematyką. Częściej jednak wielu spośród nich wymaga specjalnego podejścia w procesie dydaktycznym, uzasadnionego w opiniach i orzeczeniach poradni psychologiczno-pedagogicznych różnorodnymi ograniczeniami i zaburzeniami rozwojowymi. Dlatego materiał zebrany w niniejszej książce przeznaczony jest nie tylko dla uczniów, u których trudności w uczeniu się matematyki są skutkiem różnego rodzaju zaniedbań, ale także dla tych, u których trudności te wynikają z zaburzeń rozwojowych o różnym charakterze i nasileniu.

Wśród zaburzeń utrudniających uczniom odnalezienie się w szkole główne miejsce zajmuje autyzm wraz ze stanowiącym jego łagodniejszą postać zespołem Aspergera. Ze względu na problemy w porozumiewaniu się z otoczeniem, stopień rozwoju społecznego, odmienny sposób przetwarzania informacji oraz postrzegania świata, a także problemy z abstrakcyjnym myśleniem dzieci i młodzież z autyzmem stanowią wielkie wyzwanie dla systemu edukacji. Niestety w naszym kraju nie powstał do tej pory jednolity system zapewniający właściwe wsparcie dla uczniów z zaburzeniami autystycznymi. Ciągle brakuje dla nich programów edukacyjnych, a zestaw materiałów dydaktycznych dostosowanych do specyficznych potrzeb takich uczniów jest dość ubogi (dotyczy to zwłaszcza czwartego etapu edukacyjnego). Brakuje też wykwalifikowanej kadry nauczycielskiej mającej doświadczenie w pracy z uczniem autystycznym. Oprócz tego do przyjęcia uczniów z takimi zaburzeniami nie są przygotowane szkoły ponadgimnazjalne, panuje w nich bowiem przepełnienie i nie ma tam klas integracyjnych. Autyzm wbrew powszechnemu przekonaniu nie zawsze występuje z upośledzeniem umysłowym. Toteż uczniowie dotknięci autyzmem nie muszą być niesprawni intelektualnie (jest ich 40%). Często charakteryzują się oni dużymi możliwościami poznawczymi i bardzo dobrą pamięcią mechaniczną. Część z nich (około 10%) wyróżnia się wybitnymi zdolnościami, ale zwykle ograniczają się one do wąskiego obszaru. W przypadku matematyki przejawem owych zdolności może być na przykład niezwykła umiejętność wykonywania w pamięci działań na dużych liczbach, a zarazem niemożność rozwiązania zadania z treścią czy całkowity brak wyobraźni przestrzennej. Szczególne predyspozycje ucznia z autyzmem najczęściej dotyczą jednego szkolnego przedmiotu. Toteż zadaniem nauczyciela jest ich właściwe wykorzystanie i wzmocnienie w celu przeniesienia na inne obszary, by uczeń mający te zdolności mógł odnosić sukcesy w szkole.

Częstą przyczyną niepowodzeń uczniów w szkole są specyficzne zaburzenia funkcji poznawczych, uwarunkowane nieprawidłowym działaniem układu nerwowego. Zespół tych zaburzeń nazwa-

no dysleksją rozwojową. Zalicza się do niego dysleksję (trudności w czytaniu i pisaniu), dysortografię (trudności w opanowaniu zasad poprawnej pisowni) oraz dysgrafię (trudności w opanowaniu pisania kaligraficznego). Etiologia dysleksji nie została wyjaśniona, ale niektórzy badacze uważają, że jest to zaburzenie o podłożu genetycznym. Dysleksji nie da się wyleczyć, lecz dzięki systematycznej pracy z dyslektykiem można złagodzić jej objawy. Z badań wynika, że zaburzenie to nie zawsze wywołuje trudności z matematyką, albowiem tylko 60% dyslektyków ma trudności z matematyką, 29% ma podobne predyspozycje do matematyki jak uczniowie bez dysleksji, reszta zaś, czyli 11%, ma wysoce rozwinięte zdolności matematyczne. Zaburzenia rozwojowe o charakterze dyslektycznym występują stosunkowo często. Na przykład w Polsce wykryto je u około 15% osób w wieku szkolnym. Jak wynika z danych ogólnopolskich, odsetek ten rośnie, i to w zaskakująco szybkim tempie. Oprócz tego obserwuje się duże różnice w jego wysokości w poszczególnych województwach i miastach. Na przykład według danych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w województwie pomorskim na dysleksję cierpi ponad 17% uczniów, w województwie śląskim – 8,1%, a w opolskim – tylko 7,3%. Wysoki odsetek dyslektyków w województwie pomorskim można tłumaczyć prężną działalnością Polskiego Towarzystwa Dysleksji, co zwiększa świadomość tamtejszych rodziców i nauczycieli. W Krakowie dyslektykiem jest co czwarty uczeń, we Wrocławiu – co piąty, a w Warszawie dyslektycy stanowią około 30% wskazanej populacji. Widać więc, że im większe miasto, tym odsetek uczniów z dysleksją jest wyższy. Inne dane potwierdzają zaś mniejszą świadomość rodziców z małych miejscowości oraz ich ograniczony dostęp do poradni psychologiczno-pedagogicznych. Pojawiają się jednak opinie, że liczba wydanych orzeczeń nie odzwierciedla faktycznej liczby uczniów cierpiących na dysleksję. Na przykład niektórzy specjaliści są zdania, że część owych orzeczeń wydawana jest bezpodstawnie i zbyt pochopnie. Inaczej mówiąc, statystyki odzwierciedlają skuteczność nie tylko diagnostyki w zakresie dysleksji, ale też „lobbingu” rodziców chcących ułatwić swoim dzieciom życie. Nie zmienia to jednak faktu, że problem dysleksji istnieje i że nie można go lekceważyć. Zatem obowiązkiem nauczycieli jest wypracowanie skutecznych metod pracy z uczniem o tak specyficznych problemach z uczeniem się i dostosowanie technik dydaktycznych do jego potrzeb.

Przejawem specyficznych trudności w uczeniu się matematyki jest też coraz częściej diagnozowana i związana w wielu przypadkach z dysleksją rozwojową dyskalkulia. Jest to zaburzenie zdolności matematycznych, objawiające się kłopotami w wykonywaniu prostych działań, a także w tworzeniu mniej lub bardziej złożonych układów przestrzennych bądź ze zrozumieniem poleceń do zadań. Dyskalkulia może być rozpoznana u dziecka, które ukończyło 10 lat. O uczniach dotkniętych tą przypadłością często mówi się, że są „chorzy na matematykę”. W Polsce zrobiło się o tej „chorobie” głośno, gdy wprowadzono obowiązek zdawania matury z matematyki, albowiem w mediach zaczęto dyskutować o konieczności zwolnienia cierpiących na nią uczniów z tego obowiązku. Zwolennicy owego rozwiązania wystosowali nawet odpowiedni wniosek do ministerstwa edukacji, w którym argumentowali, że łatwa do przewidzenia porażka na egzaminie z matematyki zamyka tym uczniom drogę do szkół wyższych, mimo że niejednokrotnie wykazują oni uzdolnienia w przedmiotach humanistycznych i artystycznych. Ministerstwo wniosek ten jednak odrzuciło. wskutek czego w 2015 roku sprawa ta trafiła do Helsińskiej Fundacji Praw Człowieka. Skierowała ona pismo do Rzecznika Praw Obywatelskich w Polsce, w którym stwierdziła: „Wymóg zdania egzaminu maturalnego z matematyki przez osobę z niepełnosprawnością, której niepełnosprawność uniemożliwia zdanie tego egzaminu, w sytuacji gdy osoba ta jest w stanie zdać pozostałe obowiązkowe egzaminy maturalne, należy postrzegać jako nieuzasadnione i dyskryminujące ograniczenie możliwości korzystania z prawa do nauki z uwagi na

niepełnosprawność”. W tym miejscu należy jednak zauważyć, że według wielu badaczy „czysta dyskalkulia”, manifestująca się wyłącznie trudnościami w zakresie matematyki przy prawidłowym rozwoju poznawczym i przy zdolnościach językowych, występuje dość rzadko, bo tylko u około 1% uczniów. Toteż problem ze zdaniem matury z matematyki z powodu tego zaburzenia dotyczy stosunkowo małej grupy uczniów. Nasuwa się więc pytanie, czy jesteśmy w stanie nauczyć ich matematyki na tyle dobrze, by na egzaminie dojrzałości uzyskali z tego przedmiotu przynajmniej wymagane 30% punktów? Zdecydowanie warto podjąć taką próbę, lecz niezbędne jest do tego właściwe podejście i odpowiednio dostosowany materiał dydaktyczny.

Zestaw 67 kart pracy z matematyki zebranych w niniejszej książce stanowi próbę wyjścia na przeciw potrzebom nauczycieli, którzy na co dzień pracują z uczniami o specyficznych potrzebach edukacyjnych w szkołach ponadgimnazjalnych i mierzą się z problemem przygotowania tych uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki. Trzeba jednak zaznaczyć, że zestaw ten nie wyczerpuje wszystkich zagadnień ujętych w podstawie programowej z matematyki dla IV etapu edukacyjnego, obowiązującej od 2012 roku, ale daje niezbędny i wyraźny zarys tej podstawy. Chociaż proponowane tu karty pracy nie mogą pełnić funkcji przewodnika po podstawie programowej z matematyki, to jednak zawierają ponad 550 zadań z różnych działów matematyki o mniej lub bardziej dostosowanej strukturze. Karty te można wykorzystać zarówno do pracy na lekcji z całą klasą, jak i do zajęć wyrównawczych czy też rewalidacyjnych. Przydadzą się one również w nauczaniu indywidualnym. Zawierają pełny opis teoretyczny poruszanych w nich zagadnień matematycznych (tj. objaśnienia pojęć, wzory, rysunki, rozwiązania przykładowych zadań i wskazówki). Zatem mogą być wykorzystywane nie tylko do pracy ucznia pod kontrolą nauczyciela na lekcji, ale także do samodzielnej pracy w domu. Mogą się one okazać pomocne zarówno przy wprowadzaniu nowej partii materiału na lekcji, jak i przy przygotowywaniu do klasówki. Można też po nie sięgnąć, chcąc przypomnieć materiał i poćwiczyć przed egzaminem dojrzałości z matematyki, stanowią one bowiem solidną bazę wiedzy wymaganej na maturze. W niektórych kartach, oprócz treści obowiązujących wyłącznie na czwartym etapie edukacyjnym, został przedstawiony również materiał realizowany w gimnazjum. Dajemy więc uczniowi sposobność nadrobienia zaległości z gimnazjum w trakcie realizacji materiału z czwartego etapu edukacyjnego.

O kolejności realizowania treści podstawy programowej decyduje program nauczania. Karty pracy nie zostały więc pogrupowane według klas, w których wprowadza się dany materiał, lecz ułożono je tematycznie. Nie stosuje się tu też tradycyjnego podziału na działy matematyki, który spotykamy w szkolnych podręcznikach i zbiorach zadań. To, w jakiej kolejności owe karty będą wykorzystane, zależy od inwencji nauczyciela, planu nauczania oraz od potrzeb edukacyjnych ucznia lub całej klasy. Jednak w sytuacji gdy uczeń pracuje z kartami sam, bez nauczyciela, zaleca się zachowanie układu zaproponowanego przez autora niniejszej książki.

Jak już wspomniano, karty nie uwzględniają wszystkich partii materiału z zakresu matematyki na czwartym etapie edukacyjnym. Pominięto w nich między innymi takie zagadnienia, jak: wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym, styczność do okręgu i okręgi styczne, symetria osiowa względem osi układu współrzędnych i symetria środkowa względem początku układu współrzędnych czy procent składany. Brakuje również zagadnień związanych ze sposobami opisu i własnościami różnych funkcji oraz przekształcaniem ich wykresów – pojawiają się one jedynie przy omawianiu konkretnych funkcji, takich jak funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, funkcja wykładnicza czy funkcja, której wykresem jest hiperbola. Pozwoli to nauczycielowi generować własne

pomysły służące uzupełnieniu zaprezentowanego zestawu kart pracy o brakujące tematy. Można przy tym wzorować się na materiale już przygotowanym, ale zawsze warto szukać innych ciekawych rozwiązań.

Karty pracy zamieszczone w tej książce ułatwią nauczycielowi matematyki pracę z uczniem o specyficznych potrzebach edukacyjnych oraz pozwolą mu „bezboleśnie” przeprowadzić takiego ucznia przez czwarty etap edukacyjny. Być może dzięki temu uczeń ten zdoła nawet uzyskać pozytywny wynik na egzaminie maturalnym. Niewykluczone, że wskutek wykorzystania niniejszych kart pracy nauczycielowi uda się zmienić negatywne nastawienie uczniów do matematyki i podważyć przekonanie, że jest ona trudna. Prawdziwe jest bowiem stwierdzenie węgierskiego matematyka Johna von Neumanna: „Jeśli ludzie nie wierzą, że matematyka jest prosta, to tylko dlatego, że nie zdają sobie sprawy jak skomplikowane jest życie”.

Opis kart pracy pod kątem ich przydatności do pracy z uczniem o specyficznych problemach w uczeniu się matematyki

Rozwój umiejętności matematycznych ucznia zależy w dużym stopniu od poziomu jego motywacji oraz od sposobu nauczania dostosowanego do jego indywidualnych potrzeb. Nie sposób się jednak nie zgodzić ze stwierdzeniem, że są uczniowie bardziej lub mniej uzdolnieni w dziedzinie matematyki, a niektórym ta matematyka po prostu w żaden sposób „nie wchodzi do głowy”. O tym, że z matematyką w polskich szkołach nie jest aż tak źle oraz że nie mamy na tym polu powodów do wstydu, gdyż całkiem dobrze wypadamy na tle innych krajów Europy, mogą świadczyć choćby wyniki badań PISA (Programme for International Student Assessment – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów), które przeprowadzono w 2012 roku wśród piętnastolatków. Plasują nas one w czołówce krajów europejskich (za Holandią, Estonią i Finlandią). W ostatnich latach obserwuje się wyraźną poprawę w tym względzie. Przytoczone wyniki mogą jednak tylko na chwilę poprawić nam samopoczucie i zwiększyć samoocenę. Doskonale zdajemy sobie bowiem sprawę z tego, że przeciętna polska szkoła skupia dużą rzeszę uczniów, dla których problemy z matematyką nie są obce. Potwierdzają to między innymi statystyki dotyczące zdawalności na egzaminie maturalnym z matematyki i nic na razie nie wskazuje na to, by w najbliższym czasie sytuacja ta uległa znaczącej poprawie. Wspomniane problemy mają różne podłoże. Najczęściej jest to:

- ograniczona sprawność w przypadku wykonywania operacji na liczbach,
- ograniczona zdolność do posługiwania się reprezentacjami obrazowymi i pojęciami,
- ograniczona zdolność do zapamiętywania i stosowania prostych algorytmów,
- ograniczoną zdolnością dedukcji, uogólniania, analizowania i wyciągania wniosków.
- niski poziom wyobraźni przestrzennej,
- niski poziom koordynacji percepcyjno-motorycznej,
- niski poziom motywacji, koncentracji i dojrzałości emocjonalnej przy w warunkach dużego wysiłku intelektualnego.

Środkiem zaradczym częściowo łagodzącym skutki wymienionych problemów mogą być odpowiednio skonstruowane karty pracy, dostosowane do potrzeb ucznia o specyficznych potrzebach edukacyjnych. Karty te ułatwią takim uczniom opanowanie nawet najtrudniejszych zagadnień matematycznych. Ponadto pozwolą na wykorzystanie w procesie dydaktycznym mocnych stron ucznia oraz na wzmocnienie stron słabszych.

Matematyczne karty pracy zamieszczone w tej książce wyróżniają się swoją czytelnością (duża czcionka i pogrubienia) oraz mają spójną i przejrzystą strukturę. Komfort pracy ucznia został zwiększony przez ograniczenie liczby zadań na stronie oraz wyróżnienie początku każdego zadania. Do części teoretycznej, złożonej z pojęć, własności i wzorów, dołączono komentarz z numerami zadań, w których rozwiązywaniu podane informacje będą przydatne. Newralgiczne i wymagające szczególnej

uwagi miejsca w treści zadań i poleceń zostały odpowiednio wyróżnione: podkreśleniem, wytłuszczeniem czcionki albo kontrastowym tłem.

Na uwagę zasługuje sposób przedstawienia pojęć, wzorów, własności, algorytmów oraz rozwiązań przykładowych zadań. Przy ich prezentacji posłużono się różnymi formami graficznymi, takimi jak: schematy blokowe, diagramy, tabele czy grafy. Powszechnie wiadomo, że takie rozwiązania ułatwiają przyswajanie wiedzy między innymi uczniom z autyzmem, są również przydatne w pracy z uczniem dyslektycznym czy cierpiącym na dyskalkulię. Wśród licznych problemów uczniów z dysleksją rozwojową oraz dyskalkulią należy wymienić również zaburzenie poczucia czasu, któremu towarzyszy zaburzenie orientacji wzrokowej, słuchowej i zmysłu równowagi. Cała matematyka, poczynając od prostej arytmetyki i na skomplikowanych operacjach kończąc, wymaga uporządkowania przyczyn, następstw i czasu. Przy zaburzeniu wewnętrznego poczucia czasu zrozumienie pojęcia następstwa, czyli prawidłowości rządzącej kolejnością wydarzeń, jest utrudnione. Oparte na schematach blokowych przykładowe rozwiązania niektórych zadań mogą chociaż częściowo złagodzić te trudności. Umożliwiają one uporządkowanie przyczyn, następstw i czasu w rozumowaniu matematycznym.

Poprawne i szybkie przepisanie treści z tablicy często stanowi dla ucznia nie lada wyzwanie. Problem ten spowodowany jest niskim poziomem koordynacji percepcyjno-motorycznej. Uczniowie całą swoją uwagę skupiają na pisaniu – pracują pod presją czasu, którego brakuje im na zrozumienie przepisywanych treści. Karty zostały skonstruowane tak, aby mogły im służyć nie tylko jako materiał ćwiczeniowy, ale również zastępować notatkę z lekcji. Ułatwi to z pewnością pracę uczniom z zaburzeniami o charakterze dyslektycznym czy dysgraficznym.

Dostosowanie kart do pracy z uczniem o specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki ma swoje odzwierciedlenie również w rodzajach zadań, które te karty zawierają. Oprócz standardowych zadań zamkniętych i otwartych możemy na nich znaleźć serię zadań typu „prawda czy fałsz”, „dopasuj poszczególne elementy”, „uzupełnij luki”, „uzupełnij podany schemat rozwiązania”, „dokończ rozwiązanie zadania”. Nie pominięto też zadań typu: „udowodnij”, „uzasadnij”, „wykaż, że”, ale pojawiają się one sporadycznie. Należy pamiętać, że zadania na dowodzenie wymagają wejścia na poziom abstrakcyjnego myślenia, co dla uczniów o specyficznych problemach w uczeniu się, zwłaszcza dla tych z autyzmem, jest nie do osiągnięcia. Takie zadania są uznawane za trudne nawet dla ucznia bez dysfunkcji rozwojowych.

Problemem uczniów z dyskalkulią jest między innymi zapominanie wzorów czy kolejnych etapów jakiejś operacji. Pracując z tymi kartami, uczeń ma niczym nieograniczony dostęp do wzorów – często pojawiają się one nie tylko w części teoretycznej karty, ale są również przypisane do treści zadania. Antidotum na trudności w zapamiętywaniu kolejnych kroków w operacji mogą być z pewnością zadania typu „uzupełnij luki” czy „uzupełnij podany schemat rozwiązania”, w których przeprowadzamy ucznia krok po kroku przez kolejne etapy. W kartach przy rozwiązywaniu problemów matematycznych stosowany jest wyraźny podział na etapy. Ułatwi to być może uczniowi ich zapamiętanie.

Uczniowie z dysleksją rozwojową czy dyskalkulią popełniają liczne błędy przy przepisywaniu danych liczbowych z treści zadania. Błędy te polegają na lustrzanym zapisywaniu cyfr, opuszczaniu ich lub przestawianiu czy też na przesunięciu przecinka w liczbie dziesiętnej. Zdarza się to przeważnie w zadaniach o dłuższej treści, w których dane liczbowe trzeba wyodrębnić z tekstu. Aby chociaż częściowo temu zaradzić, w zadaniach typu „uzupełnij podany schemat rozwiązania” dane liczbowe pojawiają się dwukrotnie – w treści zadania oraz w odrębnych polach. Taki sposób prezentacji danych zwiększa ich czytelność i ogranicza w znacznym stopniu rozproszenie uwagi spowodowane obecno-

ścią tekstu w sąsiedztwie liczby. W zadaniach z podanym schematem rozwiązania zadbano więc o to, aby operacje matematyczne można było wykonywać w bezpośredniej bliskości z wartościami liczbowymi, które są w nich stosowane. W kartach jest też cała masa zadań, które takich udogodnień już nie zawierają.

Ucniów z zaburzeniami właściwymi dla dysleksji rozwojowej wyróżnia też tendencja do nieprawidłowego rozmieszczania na kartce rozwiązania zadania (tj. tekstu, zapisu matematycznego i rysunków). Prowadzi to do chaosu w zapisie i sprzyja popełnianiu dodatkowych błędów. Karty, które opublikowano w tej książce, pozwalają tego uniknąć – w większości zadań wskazujemy uczniowi miejsce na obliczenia, sporządzenie wykresu funkcji, graficzną interpretację przedziału liczbowego i zapisanie odpowiedzi. W przypadku zadań geometrycznych ograniczono do minimum sytuacje, w których uczeń zobligowany jest do samodzielnego wykonania rysunku. Wiadomo, że u ucznia z dysleksją rozwojową rysunki te są nieporadne, nieczytelne i często jest w nich zaburzony kierunek, co prowadzi do błędów w rozwiązaniu zadania albo to rozwiązanie uniemożliwia.

Karty pracy zamieszczone w tej książce są znakomitym narzędziem do wypracowywania powtarzalności i schematyzmu (odbywa się to oczywiście kosztem różnorodności zadań). Stanowi to fundament pracy z uczniem dyslektycznym, u którego oczekiwany efekt osiągamy wskutek wielokrotnego powtarzania tych samych ćwiczeń, natomiast w przypadku ucznia z autyzmem, który schematami operuje dość sprawnie, umożliwia doskonalenie jego mocnych stron, co jest przecież jedną z podstawowych zasad w nauczaniu. Większość zadań otwartych poprzedzono rozwiązaniem przykładem albo zadaniem o zbliżonej treści, ujętym w formule „uzupełnij podany schemat rozwiązania, dokończ rozwiązanie zadania”. Zatem karty dostarczają uczniowi czytelny i przejrzysty schemat rozwiązania standardowych zadań, jednocześnie wdrażając go do samodzielnej pracy z tekstem matematycznym. Schematyczne podejście do nauczania matematyki nie znajdzie zapewne uznania w oczach pewnej grupy nauczycieli i ludzi związanych z oświatą. Z raportu Instytut Badań Edukacyjnych o stanie polskiej edukacji w 2013 roku wynika, że nauczanie schematami jest największym „grzechem” nauczycieli matematyki. Warto jednak pamiętać, że to właśnie schematy i proste algorytmy są punktem wyjścia do osiągnięcia wyższego poziomu wiedzy i umiejętności matematycznych. Żeby uczeń został odkrywcą poszukującym własnej strategii rozwiązania problemu, musi najpierw opanować proste algorytmy. Jednak zdecydowana większość tych uczniów, do których adresowane są omawiane karty, na ten wyższy poziom nigdy nie wejdzie. Skoro ze względu na ich różnorodne ograniczenia w przyswajaniu wiedzy nie możemy ich nauczyć kreatywnego i twórczego podejścia do matematyki, to pokażmy im przynajmniej schematy i połóżmy nacisk na powtarzalność kluczowych umiejętności matematycznych. Ponownie więc na pierwszy plan wysuwa się dostosowanie metod pracy do możliwości ucznia o specyficznych potrzebach w uczeniu się matematyki.

Do kluczowych umiejętności, na których „szkolna matematyka” się opiera, zaliczyć należy między innymi umiejętność wykonywania działań na liczbach oraz rozwiązywania różnego rodzaju równań i nierówności (istotnych również w kontekście egzaminu maturalnego z matematyki). W kartach położono duży nacisk na kształcenie tych właśnie umiejętności. Najprostsze nawet zadania, których rozwiązanie oparte jest na podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych do wzoru, zmuszają ucznia do wykonania mniej lub bardziej złożonych operacji na liczbach. Wiadomo, że proces ten jest zakłócony u ucznia z dyskalkulią czy dysleksją rozwojową, mamy więc możliwość, aby chociaż częściowo ten problem zniwelować. Nie można jednak zapominać, że u ucznia z tymi zaburzeniami błędy rachunkowe mają mniejszą wagę, decydująca jest zaś metoda rozwiązania zadania. Nie zwalnia to

jednak nauczyciela z obowiązku pracy nad sprawnością rachunkową tych uczniów. Umiejętność rozwiązywania równań różnego typu można doskonalić nie tylko za pomocą kart, które bezpośrednio tych równań dotyczą (tj. równań liniowych, równań kwadratowych, równań stopnia większego niż 2, równań wymiernych, zadań tekstowych sprowadzalnych do równań liniowych czy wreszcie prostych równań z wartością bezwzględną). Również w innych kartach, zwłaszcza tych dotyczących planimetrii, stereometrii, ciągów czy statystyki, znajdziemy wiele zadań, które zmuszają ucznia do rozwiązania odpowiedniego równania. W nieco w mniejszym stopniu prezentowane są tu nierówności (nierówności liniowe i nierówności kwadratowe).

W kartach zadbano też o to, aby w miarę możliwości, koncentrując się na uogólnianiu indukcyjnym, stwarzać sytuacje do kształcenia umiejętności uogólniania, które jest fundamentem rozumowania matematycznego. Uczeń często po wykonaniu ciągu prób matematycznych musi dostrzec prawidłowość w rezultatach tych prób i sformułować odpowiedni wniosek. Odkrywanie prostych zależności i prawidłowości w matematyce odbudowuje poczucie wiary we własne możliwości, które jest wyraźnie osłabione u ucznia ze specyficznymi problemami w uczeniu się matematyki. Wzory i zależności matematyczne wprowadzone tą metodą z reguły są łatwiejsze do zapamiętania. W kartach, proces uogólniania, dość trudny dla ucznia z zaburzeniami o charakterze dyslektycznym, jest odpowiednio stymulowany i kontrolowany. Uczeń otrzymuje kompletny zakres prób, a jego rola sprowadza się do ich przeprowadzenia i postawienia wniosku. Ten sposób wdrażania ucznia do prostego uogólniania typu indukcyjnego można zaobserwować przy omawianiu:

- potęg $(\sqrt{a})^2$, $(\sqrt{a})^3$, $(\sqrt[3]{a})^3$, $(\sqrt[3]{a})^4$ (Karta pracy 5),
- porównywania potęg o tych samych podstawach (Karta pracy 7),
- własności wartości bezwzględnej (Karta pracy 10),
- zasad postępowania ze zwrotem nierówności mnożonej obustronnie przez liczbę dodatnią albo ujemną (Karta pracy 18),
- graficznej metody rozwiązywania układów równań liniowych (Karta pracy 19),
- przesunięcia wykresu funkcji kwadratowej wzdłuż osi OX i OY (Karta pracy 21),
- wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego (Karta pracy 31),
- wzoru ogólnego ciągu geometrycznego (Karta pracy 33),
- wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (Karta pracy 34),
- wzoru na stosunek obwodów i pól wielokątów podobnych (Karta pracy 50).

Przy planowaniu procesu dydaktycznego z udziałem ucznia o specyficznych trudnościach w uczeniu się powinniśmy bazować na tym, co ten uczeń potrafi i wykonuje najlepiej, oraz szukać dla niego takich obszarów oddziaływań, w których ma on większe szanse na osiągnięcie sukcesu i podwyższenie własnej samooceny. Nasze działania powinny pójść w kierunku stwarzania takich sytuacji, które minimalizują słabe strony ucznia i ograniczają możliwości popełnienia przez niego błędu. Właśnie taka myśl kierowała autorem przy opracowywaniu kart prezentowanych w tej książce.

Zadanie 1. Wypisz elementy zbiorów.

a) A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 5; $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) B – zbiór liczb naturalnych x spełniających warunek: $2 \leq x < 9$
 $B =$

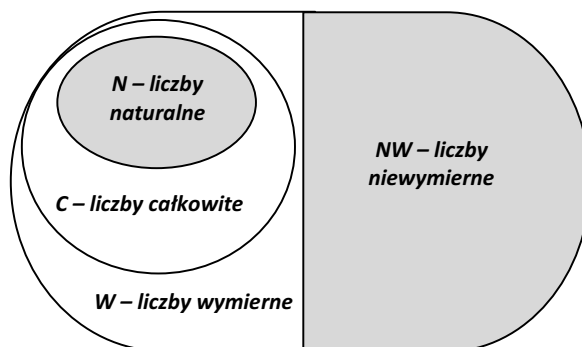
c) C – zbiór liczb całkowitych x spełniających warunek: $-4 < x \leq 2$
 $C =$

d) D – zbiór naturalnych dzielników liczby 12
 $D =$

e) E – zbiór liczb całkowitych, których kwadrat jest mniejszy od 5
 $E =$

f) F – zbiór liczb wymiernych, których kwadrat jest równy 3
 $F =$

ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH



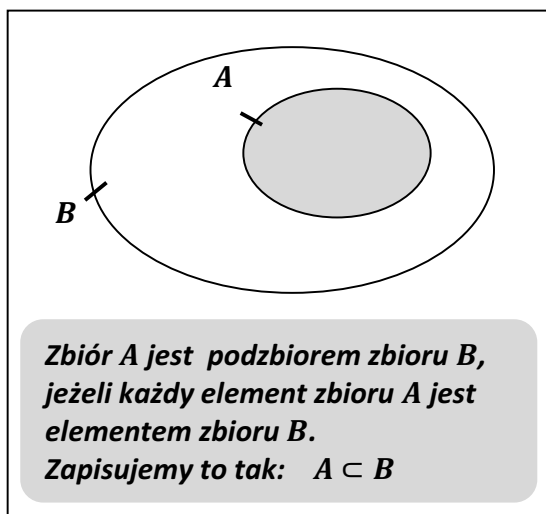
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 W – liczby, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego
 NW – liczby, których nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego

Zbiór, który nie ma żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy symbolem \emptyset .

Zadanie 2. Czy zbiór A jest podzbiorem zbioru B ? Wpisz TAK lub NIE. W przypadku wskazania odpowiedzi NIE uzasadnij swój wybór.

a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

NIE, ponieważ liczba 5 jest elementem zbioru A i nie jest elementem zbioru B .



b) $A = \{-1, 0, 1\}; B = \{0, 1, 2, 3\}$

.....

c) $A = \{\sqrt{4}, \sqrt{9}\}; B = \{2, 3, 4\}$

.....

d) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

.....

e) $A = \{1, 2, 3\}, B = \left\{1, \frac{4}{2}, \frac{9}{3}, 4\right\}$

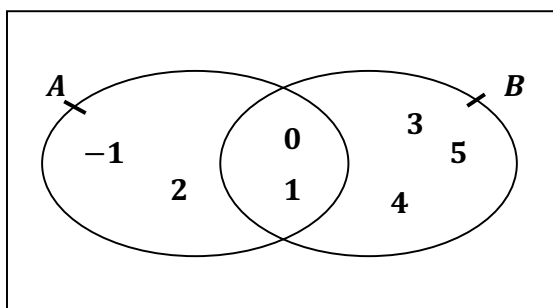
.....

Zadanie 3. Do zbioru z szarego pola dopasuj zbiory z pól białych według zasady: zbiór z pola białego jest podzbiorem zbioru z pola szarego.

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	<i>kwadraty liczb naturalnych mniejszych od 4</i>
<i>naturalne dzielniki liczby 12</i>	<i>liczby naturalne mniejsze od 12</i>	$\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
$\{\sqrt{36}, \sqrt{49}, \sqrt{64}, \sqrt{81}\}$	<i>liczby pierwsze mniejsze od 13</i>	$\{\sqrt{100}, \sqrt{121}, \sqrt{144}\}$

Zadanie 4. Z diagramu poniżej odczytaj elementy zbiorów $A, B, A \cup B$.

a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}; B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$
 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



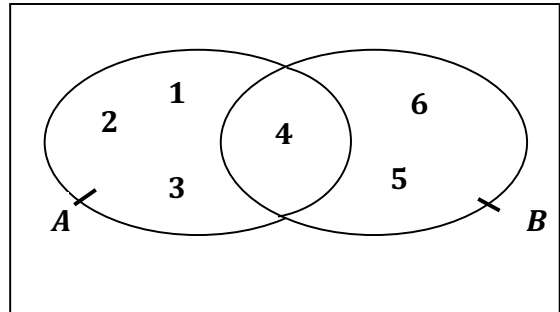
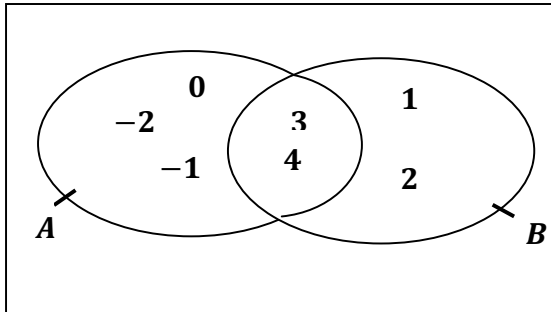
SUMA ZBIORÓW A i B

$A \cup B$

Sumą zbiorów A i B jest zbiór tych elementów, które są elementami zbioru A lub zbioru B .

b) $A =$
 $B =$
 $A \cup B =$

c) $A =$
 $B =$
 $A \cup B =$



Zadanie 5. Dane są zbiory A i B . Wypisz elementy zbioru $A \cup B$.

a) $A = \{-3, -2, -1\}$
 $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{1, 2, 3\}$

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B =$

c) $A = \{-4, -3, -2, -1\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4\}$

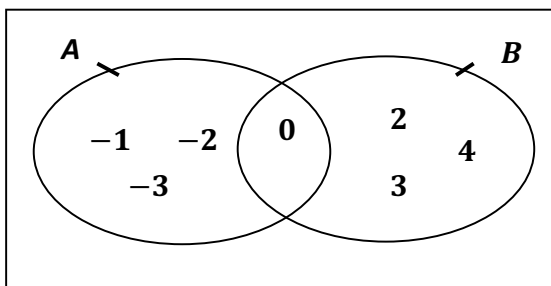
d) $A = \{0\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup B =$

$A \cup B =$

Zadanie 6. Z diagramu poniżej odczytaj elementy zbiorów $A, B, A \cap B$ (o ile takie elementy istnieją).

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $A \cap B = \{0, 1\}$



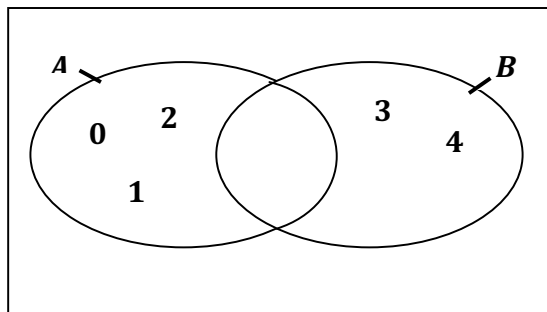
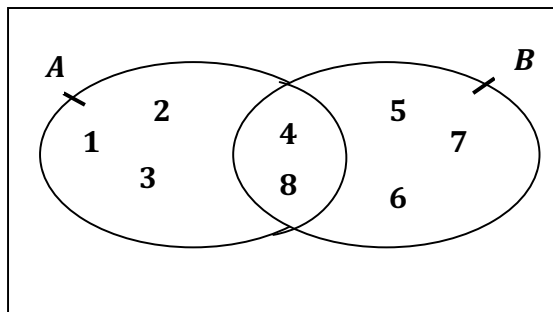
ILOCZYN ZBIORÓW A i B

$A \cap B$

Iloczynem zbiorów A i B jest zbiór takich elementów, które są równocześnie elementami zbioru A i zbioru B .

b) $A =$
 $B =$
 $A \cap B =$

c) $A =$
 $B =$
 $A \cap B =$



Zadanie 7. Dane są zbiory A i B . Wypisz elementy zbioru $A \cap B$ (o ile takie elementy istnieją).

a) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{0\}$

$A \cap B =$

c) $A = \{-4, -3, -2, -1\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

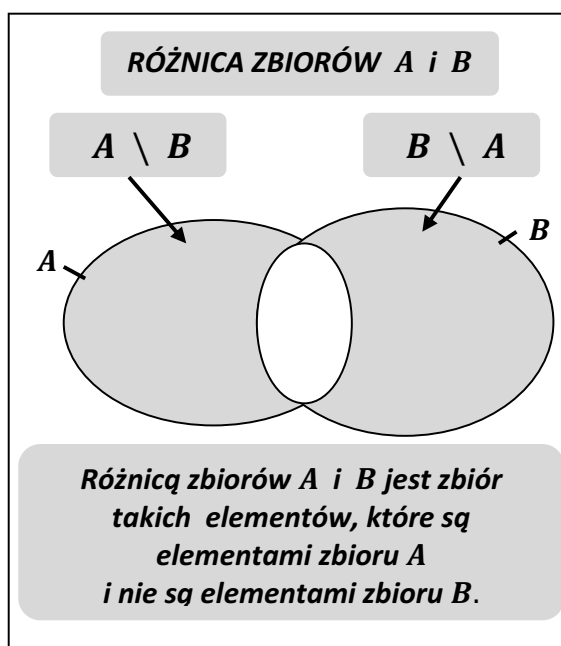
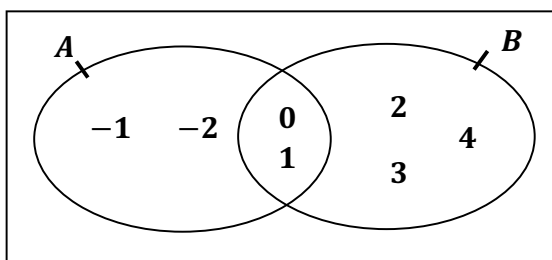
d) $A = \{3, 4, 5\}$
 $B = \{3, 4, 5\}$

$A \cap B =$

$A \cap B =$

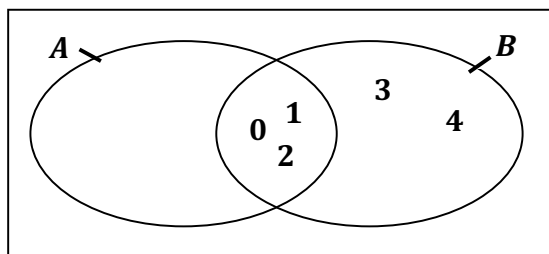
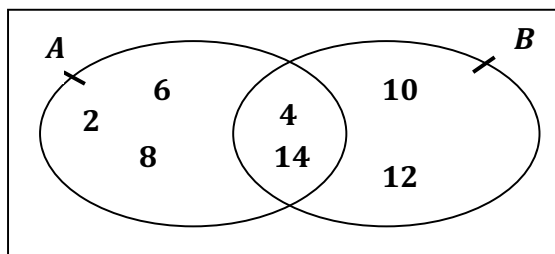
Zadanie 8. Z diagramu poniżej odczytaj elementy zbiorów $A, B, A \setminus B, B \setminus A$ (o ile one istnieją).

a) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $A \setminus B = \{-2, -1\}$
 $B \setminus A = \{2, 3, 4\}$



b) $A =$
 $B =$
 $A \setminus B =$
 $B \setminus A =$

c) $A =$
 $B =$
 $A \setminus B =$
 $B \setminus A =$



Zadanie 9. Dane są zbiory A i B . Wypisz elementy zbiorów $A \setminus B$; $B \setminus A$ (o ile one istnieją).

a) $A = \{-6, -4, -2, 0\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$
 $B = \{10\}$

$A \setminus B = \{-6, -4, -2\}$

$A \setminus B =$

$B \setminus A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B \setminus A =$

c) $A = \{-4, -3, -2, -1\}$
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $A = \{3, 4, 5, 6\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \setminus B =$

$A \setminus B =$

$B \setminus A =$

$B \setminus A =$

Zadanie 10. Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 9; B – zbiór naturalnych dzielników liczby 16. Wypisz elementy zbiorów A ; B ; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

$A =$

$A \cap B =$

$B =$

$A \setminus B =$

$A \cup B =$

$B \setminus A =$